KERMIT

Kompetenzen ermitteln

Mathematik

Didaktisches Material

2025

8

Version **B / C**

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,
die vorliegende Veröffentlichung enthält die Aufgabenstellungen, Lösungen und didaktischen Kommentierungen der *KERMIT 8 Mathematik 2025*[1], die vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen der Humboldt-Universität zu Berlin (IQB) erstellt wurden. Die didaktischen Materialien sollen nicht nur ganz konkret über die Bildungsstandards Mathematik und einen entsprechenden kompetenzorientierten Unterricht informieren, sondern sie sollen vor allem Sie als Lehrkraft in Ihrem täglichen Bemühen um einen solchen Unterricht unterstützen. Aus diesem Grund werden in dieser Handreichung allgemeine Informationen zu getesteten Kompetenzbereichen gegeben. Anschließend werden eine Reihe von Aufgaben, die bei KERMIT 8 (2025) in den Testheften B und C eingesetzt wurden mitsamt ihren jeweiligen Lösungen und didaktischen Kommentierungen wiedergegeben.
Wir möchten Sie darauf hinweisen, dass die vorliegende Veröffentlichung keine Testergebnisse Hamburger Schülerinnen und Schüler enthält; die Rückmeldung der Testergebnisse Ihrer Schülerinnen und Schüler erhalten Sie über Ihre Schulleitung direkt vom Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung. Sie können das didaktische Material für Ihre persönlichen (Unterrichts-)Zwecke in gewohnter Weise vervielfältigen und weitergeben.
Wir freuen uns über Ihre Kommentare und Anregungen zu der vorliegenden Veröffentlichung. Sie helfen uns damit, Ihre Erwartungen zukünftig noch besser erfüllen zu können.

Ihr KERMIT-Team am Institut für Bildungsmonitoring und Qualitätsentwicklung
Beltgens Garten 25
20537 Hamburg
Mail: kermit@ifbq.hamburg.de

---

[1] **Die Bezeichnung für diese länderübergreifende Erhebung ist nicht überall gleich. In einigen Bundesländern werden sie als Vergleichsarbeiten (VERA) bezeichnet, in anderen werden sie Lernstandserhebungen genannt.**

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz *(KMK*, 2004, 2005, 2005b, 2015) mit ihren Leitideen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen bilden die Grundlage für die Vergleichsarbeiten in der 8. Jahrgangsstufe (KERMIT-8) im Fach Mathematik. Daher wird in dieser didaktischen Handreichung zunächst der Aufbau der Bildungsstandards vorgestellt. Anschließend der Schwerpunkt der diesjährigen Ergänzungsmodule näher erläutert: die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* mit einem Fokus auf das Thema *proportionale und antiproportionale Zuordnungen*. Es werden insbesondere zu Aspekten des Schwerpunktes fachdidaktische Herausforderungen geschildert und Anregungen vorgestellt, wie mit diesen in der Unterrichtspraxis umgegangen werden kann. In dem dazugehörigen Kapitel werden außerdem Aufgaben aus KERMIT-8 präsentiert, die sich der diesjährigen Schwerpunktsetzung zuordnen lassen. Dabei handelt es sich um Beispiele für Aufgabenformulierungen, welche die verschiedenen allgemeinen Kompetenzen adressieren und zudem im Unterricht zur Förderung der Kompetenzen herangezogen werden können.

2. Bildungsstandards und Kompetenzmodell im Fach Mathematik

Im Anschluss an die Ergebnisse großer internationaler Vergleichsstudien – wie etwa der PISA-Studie oder TIMSS – führte die Kultusministerkonferenz (KMK) ab dem Jahr 2003 Bildungs-standards für die Fächer Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache (Englisch/ Französisch) ein[2]. Eine grundlegende Wende stand bevor: Während zuvor der *Input* im Vordergrund stand, also Inhalte und Themen, sollte nun auch der *Output* stärkere Beachtung finden, also der Aufbau von Kompetenzen, Wissensstrukturen, Werten, etc. Inhalte sollten mit der Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen verknüpft werden, die die Basis für ein lebenslanges Lernen legen und so persönliche Weiterentwicklung und gesellschaftliche Teilhabe ermöglichen (*Klieme et al.*, 2003). Die OECD betont dabei den Anwendungscharakter von Mathematik:

> „Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit des Einzelnen, Mathematik in einer Vielzahl von Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren. Sie umfasst mathematisches Argumentieren und die Verwendung mathematischer Konzepte, Verfahren, Fakten und Werkzeuge zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von Phänomenen. Sie hilft dem Einzelnen, die Rolle zu erkennen, die die Mathematik in der Welt spielt, und begründete Urteile und Entscheidungen zu treffen, die von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern benötigt werden.“ (*OECD*, 2013, S. 25, eigene Übersetzung)

Zu diesem Zweck benennen die Bildungsstandards Kompetenzen, die Schüler*innen bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe anhand zentraler Fachinhalte erworben haben sollen

[2] https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html

(*KMK,* 2004, 2005). Dabei wird davon ausgegangen, dass ein allgemeinbildender Mathematik-unterricht Schüler*innen die folgenden drei *Grunderfahrungen* ermöglicht (Winter, 1995, S. 37):

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Bildungsstandards umfassen in ihrem Wesen die benannten Grunderfahrungen sowie Inhalte, Kompetenzen und Niveaustufen, wie das folgende Kompetenzmodell für das Fach Mathematik darlegt. Das Kompetenzmodell liefert einen *Handlungsrahmen* für Lehrpersonen und Schulen, zur Einhaltung verbindlicher Ziele sowie zur Weiterentwicklung von Schule und Unterricht (*Klieme et al*., 2003). Handlungsrahmen bedeutet insbesondere, dass im Vordergrund nicht die Umsetzung eines aus der fachlichen Systematik entstehenden ‚starren Gerüsts‘ steht, sondern den Schulen ein großer „Freiraum für die innerschulische Lernplanung“ (*ebd*., S. 9) gelassen wird. Es werden in diesem Modell zunächst die folgenden drei Dimensionen unterschieden:

1. Allgemeine mathematische Kompetenzen
2. Leitideen
3. Anforderungsbereiche

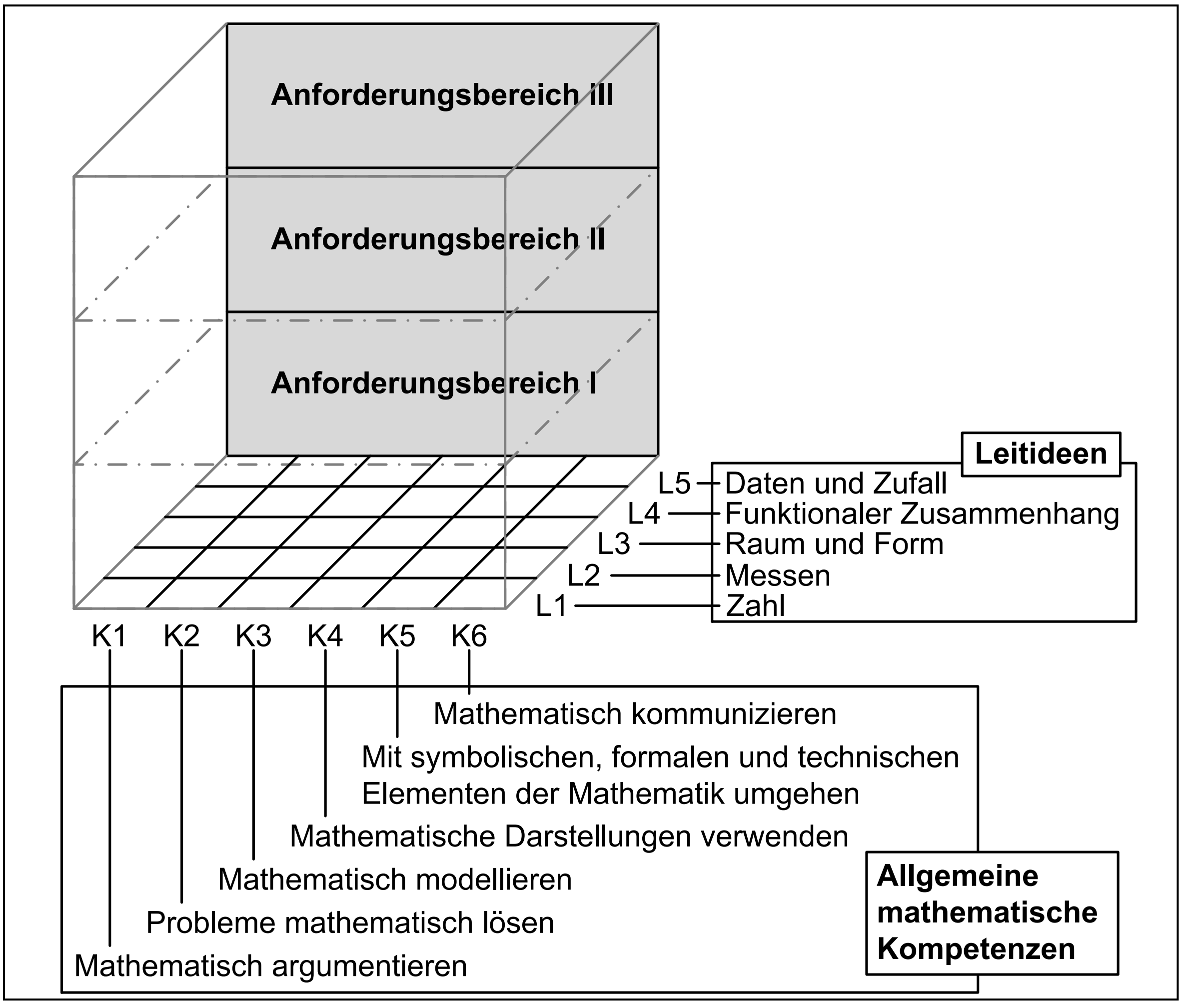


Abbildung 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* bilden die Prozessdimension des Modells. Dabei wird vom Grundgedanken ausgegangen, „das Können der Schüler an den *Kompetenzen* festzumachen, die sie beim Bearbeiten von Aufgaben zu aktivieren haben“ (*Leiss & Blum*, 2010, S. 33). Im Einzelnen sind dies die Kompetenzen *Mathematisch argumentieren* (K1), *Probleme mathematisch lösen* (K2), *Mathematisch modellieren* (K3), *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) und *Mathematisch kommunizieren* (K6). Diese *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* sollen differenziert betrachtet werden, auch wenn sie üblicherweise im Verbund erworben werden und häufig auch gemeinsam angewendet werden müssen. Insbesondere werden bei der Bearbeitung von komplexeren mathematischen Aufgaben oft mehrere dieser Kompetenzen benötigt. Mit der getrennten Betrachtung ist die Absicht verbunden, spezifische Eigenschaften und Anforderungen von Aufgaben im Mathematikunterricht transparent zu machen, was eine differenziertere Planung des Mathematikunterrichts ermöglicht. So kann ein mathematischer Inhalt den Schüler*innen entlang verschiedener durchzuführender mathematischer Tätigkeiten zugänglich gemacht werden. Inhalte können durch die multiperspektivische und wiederholte Betrachtung eher in ihrer Gänze verstanden werden und mathematische Kompetenzen anhand unterschiedlichster Erscheinungen über den Inhalt hinaus erworben werden.

Jedoch reicht der Blick auf die *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* für eine produktive Gestaltung des Mathematikunterrichts nicht aus *(Leiss & Blum*, 2010). Daher bilden die *Leitideen* eine zweite Dimension des Modells. Die fünf Leitideen sind *Zahl* (L1), *Messen* (L2), *Raum und Form* (L3), *Funktionaler Zusammenhang* (L4) und *Daten und Zufall* (L5). In den Bildungsstandards wird zu den Leitideen erläutert:

> „Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig. Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll.“ (KMK, 2004, S. 9).

Leitideen folgen keinem fachdidaktischen Aufbau im Sinne einer zeitlichen Abfolge im Lernprozess („erst kommt das Zählen, dann kommt das Messen, usw.“), sondern sie erlauben es, bestimmte mathematische Inhalte unter einer Kategorie zusammenzufassen. Vielmehr soll durch die Betonung von Leitideen deutlich werden, dass sich aus mathematischen Phänomenen wie dem Zählen, dem Messen oder dem Umgang mit Zufällen mathematische Sachgebiete herausgebildet haben (*Greefrath* 2018, *Blum* 2010).

Die dritte Dimension enthält die drei *Anforderungsbereiche*. Sie beschreiben die Komplexität von Aufgaben, denn das Bearbeiten und Lösen von Aufgaben fordert mathematische Kompetenzen in unterschiedlichen Ausmaßen (*KMK*, 2004). Es werden dabei in der Regel drei Anforderungsbereiche unterschieden. Mit dem *Anforderungsbereich I* werden Anforderungen an allgemeine Kompetenzen beschrieben, die zum *Reproduzieren* unterrichtlicher Inhalte befähigen. Zum *Anforderungsbereich II* zählen solche Anforderungen an allgemeine Kompetenzen, die es Schüler*innen ermöglichen *Zusammenhänge herzustellen* und Gelerntes anzuwenden. In den *Anforderungsbereich III* gehören diejenigen Anforderungen, die es Schüler*innen abverlangen zu *verallgemeinern und zu reflektieren* (*ebd.*).

Die drei Bestandteile des Kompetenzmodells stellen gleichwertige Dimensionen der Bildungsstandards dar. Im Folgenden wird exemplarisch ein Aspekt der Leitidee *Daten und Zufall* herausgegriffen und erläutert. Eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den *Allgemeinen mathematischen Kompetenzen* – also der Prozessdimension des Kompetenzmodells – ist eine maßgebliche Errungenschaft der Bildungsstandards, die auch bei exemplarischer Betrachtung einzelner Leitideen nicht in den Hintergrund geraten sollte.

3. Die Leitidee Funktionaler Zusammenhang

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss werden unter der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* die folgenden, inhaltsbezogenen Kompetenzen zusammengefasst (*KMK*, 2004):

Die Schülerinnen und Schüler

- *nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge,*
- *erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar,*
- *analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale),*
- *lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen,*
- *interpretieren lineare Gleichungssysteme graphisch,*
- *lösen Gleichungen, und lineare Gleichungssysteme kalkülmäßig bzw. algorithmisch, auch unter Einsatz geeigneter Software, und vergleichen ggf. die Effektivität ihres Vorgehens mit anderen Lösungsverfahren (wie mit inhaltlichem Lösen oder Lösen durch systematisches Probieren),*
- *untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von linearen und quadratischen Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen und formulieren diesbezüglich Aussagen,*
- *bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her,*
- *wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,*
- *verwenden die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen,*
- *beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen, auch unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms,*
- *geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.*

Auch in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss (*KMK*, 2005) finden sich die aufgeführten inhaltsbezogenen Kompetenzen wieder, wobei prozentualem Wachstum und Maßstäben in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss eine größere Bedeutung zugeschrieben wird. Lineare Gleichungssysteme, quadratische Funktionen, Exponentialfunktionen sowie periodische Vorgänge sind in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss nicht aufgeführt. Da ebendiese inhaltsbezogenen Kompetenzen keinen

Bestandteil der KERMIT-8 Erhebung darstellen, beinhalten die Bildungsstandards beider Abschlüsse für den Lernstand der Jahrgangsstufe 8 im Wesentlichen die gleichen inhaltsbezogenen Kompetenzen.

Funktionale Zusammenhänge sind allgegenwärtig, zum Beispiel die Strecke beim Busfahren, die in einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird, oder der Einkaufspreis beim Bäcker in Abhängigkeit von der Anzahl der Brötchen. Immer dann, wenn „eine Größe von einer anderen Größe abhängt" (*Greefrath et al.*, 2016, S. 36), kommen wir auf natürliche Weise in Kontakt damit. Bereits in der Grundschule werden erste funktionale Denkweisen vermittelt (*Vollrath*, 1989). Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (*KMK*, 2005b) beschreiben in dieser Hinsicht die Leitidee *Muster und Strukturen*, an die in der Sekundarstufe I unter anderem die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* anschließt. In der Primarstufe stehen dabei unter anderem die Fähigkeiten im Fokus, funktionale Beziehungen in Sachsituationen zu erkennen, sprachlich zu beschreiben und in Tabellen darzustellen. In der Sekundarstufe I werden daran anknüpfend das kartesische Koordinatensystem und Variablen eingeführt und funktionale Zusammenhänge auch mithilfe von Termen sowie Funktionsgraphen dargestellt. Der Umgang mit proportionalen und antiproportionalen funktionalen Zusammenhängen wird explizit als inhaltsbezogene Kompetenz genannt. Die Schülerinnen und Schüler sollen diese speziellen Arten von funktionalen Zusammenhängen analysieren, interpretieren und vergleichen können. Darüber hinaus sollen sie lernen, realitätsnahe Probleme, denen ein proportionaler oder antiproportionaler Zusammenhang zugrunde liegt, zu lösen. Proportionale sowie anti-proportionale Zuordnungen gehören zu den ersten funktionalen Zusammenhängen, auf die Schülerinnen und Schüler im Unterricht stoßen (*Heiderich & Hussmann*, 2013) und stellen in den diesjährigen KERMIT-8 Erhebungen ein Schwerpunktthema dar.

3.1. Schwerpunktthema: *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*

Proportionale und antiproportionale Zuordnungen stellen einen wichtigen alltagsrelevanten Inhalt des Mathematikunterrichts dar (*Hafner*, 2012). Oftmals werden proportionale Zuordnungen mit Modellierungen im Kontext *Einkaufen* eingeführt. Der Anzahl oder der Menge eines Artikels wird der zugehörige Preis zugeordnet. Hierbei wird üblicherweise vereinfachend angenommen, dass es keine Aktionen oder Rabatte auf diesen Artikel gibt. Aber auch eine Autofahrt mit konstanter Geschwindigkeit kann mit den Größen *zurückgelegte Strecke* und *benötigte Zeit* durch eine proportionale Zuordnung modelliert werden. Demgegenüber stehen
Situationen, die mithilfe von antiproportionalen Zuordnungen beschrieben werden können, welche sich in der Realität ebenfalls finden. Konkret lässt sich das Abpumpen eines

Wasserbeckens, für das je nach Anzahl identischer Pumpen unterschiedlich viel Zeit benötigt wird, mittels antiproportionaler Zuordnung modellieren. Im Unterricht sollte im Zusammenhang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen immer die entsprechende Modellierung thematisiert werden und oben genannte Vereinfachungen sollten explizit diskutiert werden, um deutlich zu machen, dass die Realität oftmals nur in Grenzen durch ein Modell abgebildet werden kann (*Greefrath*, 2018). Proportionale und antiproportionale Zuordnungen sollten im Unterricht nicht isoliert voneinander behandelt werden, sondern gerade das Wechselspiel und der Vergleich zwischen ihnen sollten fokussiert werden. Darüber hinaus sollten ebenfalls ausreichend Beispiele herangezogen werden, die der Fehlvorstellung entgegenwirken, dass eine Zuordnung entweder proportional oder antiproportional sein muss. In diesem Zusammenhang könnte beispielsweise thematisiert werden, dass in Supermärkten oft mit verhältnismäßig niedrigeren Preisen für größere Mengen geworben wird. Durch diesen „Mengenrabatt" wird die Proportionalität aufgehoben.

Je nach Problemsituation können verschiedene Lösungsstrategien verwendet werden, um Aufgabenstellungen, denen ein proportionaler oder antiproportionaler Zusammenhang zugrunde liegt, zu lösen (*Hafner*, 2012). Diese Lösungsstrategien hängen eng mit den Grundvorstellungen zu proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen zusammen, sodass der Aufbau tragfähiger und vielfältiger Grundvorstellungen dazu beiträgt, dass Problemsituationen adäquat gelöst werden können.

Sowohl für proportionale als auch für antiproportionale Zuordnungen existieren verschiedene Grundvorstellungen, durch die der jeweilige Begriff inhaltlich gedeutet werden kann. Der Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen ist notwendig, um ein tiefgründiges Verständnis mathematischer Begriffe aufzubauen (*Greefrath*, 2018).

Bei den Grundvorstellungen von proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen handelt es sich um abstrahierte Handlungsvorstellungen. Sie basieren auf den fachlich charakteristischen Eigenschaften.

Die Grundvorstellungen zu proportionalen Zuordnungen sind in Abbildung 2 anhand einer Tabelle veranschaulicht. Die *Vervielfachungsvorstellung* beinhaltet, dass bei einer Vervielfachung der Ausgangsgröße (z.B. Anzahl) auch die zugeordnete Größe (z.B. Preis in €) um denselben Faktor vervielfacht wird. Die *Verhältnisvorstellung* besagt, dass der Quotient zweier Ausgangsgrößen und der Quotient derer zugeordneter Größen gleich ist. *Die Quotientenvorstellung* hingegen basiert darauf, dass der Quotient von zugeordneter Größe und der jeweiligen Ausgangsgröße immer konstant ist. Der Faktor, mit dem die Ausgangsgröße multipliziert wird, um die zugeordnete Größe zu erhalten, nennt sich Proportionalitätsfaktor. Dieser ist charakterisierend für die *Proportionalitätsvorstellung*.

Bei der *Additionsvorstellung* gilt: Werden zwei Ausgangsgrößen miteinander addiert, so erhält man eine neue Ausgangsgröße. Werden die jeweilig zugeordneten Größen der zwei Ausgangsgrößen miteinander addiert, so erhält man die zugeordnete Größe der neuen Ausgangsgröße (*Greefrath,* 2018; *Hafner* 2012).

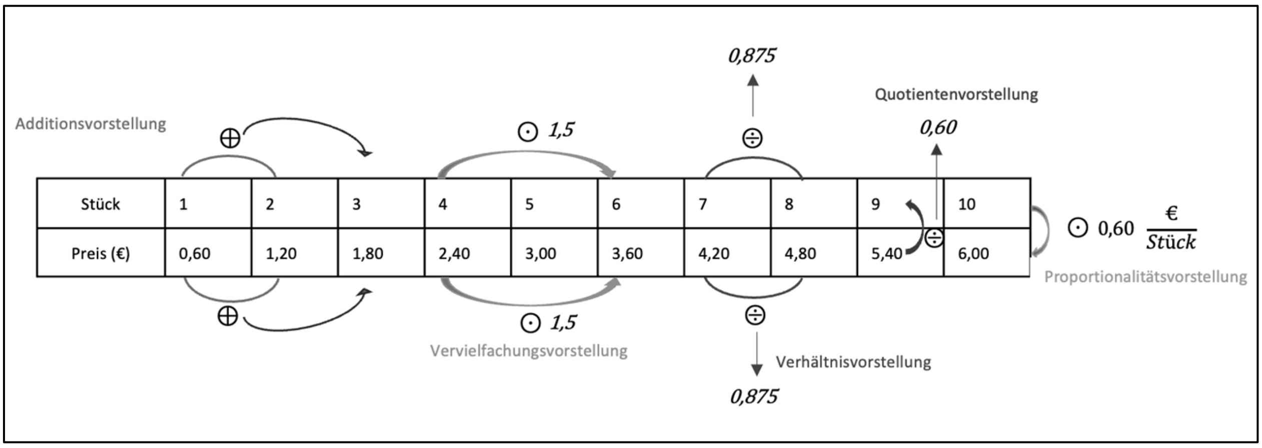


Abbildung 2: Grundvorstellungen proportionaler Zuordnungen am Beispiel „Einkaufen"

Die Grundvorstellungen zu antiproportionalen Zuordnungen lassen sich mit Ausnahme der *Additionsvorstellung* analog herleiten (Abbildung 3).

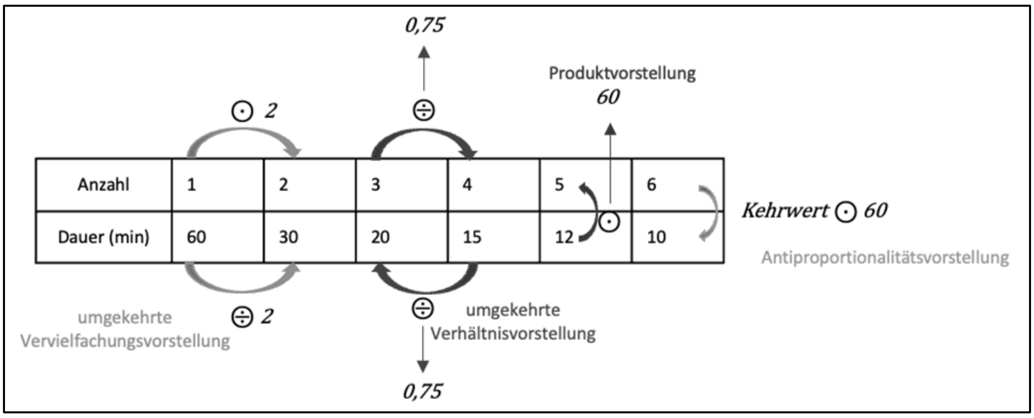


Abbildung 3: Grundvorstellungen antiproportionaler Zuordnungen am Beispiel „Abpumpen"

Alle im Folgenden angeführten Strategien zur Lösung von Aufgaben, für die Proportionalität vorausgesetzt wird (Tabelle 1), können analog auf Aufgaben mit antiproportional zugrunde liegendem Zusammenhang übertragen werden. In der Tabelle 1 wird das Standardverfahren für jede Strategie beispielhaft skizziert. Die genannten Strategien können jedoch auch nicht standardisiert, d.h. zum Beispiel ohne sie konkret in dieser Art zu notieren, durchgeführt werden. Das Aktivieren und Entwickeln solcher eher informeller Strategien fördert ein intuitives proportionales Verständnis (*Prediger et al.*, 2017; *Pöhler & Prediger*, 2017).

Bei dem *individuellen Dreisatz* kommt die *Vervielfachungsvorstellung* zum Tragen. Ausgehend von dem gegebenen Wertepaar wird durch Multiplikation (Hochrechnen) mit dem passenden Faktor der gesuchte Wert zur Ausgangsgröße ermittelt. Diese Methode bietet sich vor allem dann an, wenn der passende Faktor leicht ersichtlich ist, wie zum Beispiel bei einer Verdopplung. In anderen Beispielen kann es sich jedoch auch anbieten, ausgehend vom gegebenen Wert durch Division (Runterrechnen) den gesuchten Wert zu ermitteln. Auch eine Kombination aus Hoch- und Runterrechnen ist eine individuelle Anwendung des Dreisatzes. Bei der *Operatormethode* wird der Proportionalitätsfaktor genutzt, um den zugehörigen Wert zur Ausgangsgröße zu berechnen. Bei der *Bruch-/ Verhältnisgleichung* wird von der *Verhältnisvorstellung* oder der *Quotientenvorstellung* Gebrauch gemacht, um eine Bruchgleichung aufzustellen und so den gesuchten Wert zu bestimmen. Bei dem bekannten *klassischen Dreisatz* wird, um von einem gegebenen Wertepaar auf das gesuchte Wertepaar zu kommen, ein Zwischenschritt gemacht. In diesem Zwischenschritt wird das Wertepaar ermittelt, bei dem der erste Wert die Maßzahl 1 hat. Im nächsten Schritt wird das Wertepaar mit dem gesuchten Wert ermittelt. Insgesamt wird also zweimal hintereinander die *Vervielfachungsvorstellung* genutzt.

Individueller Dreisatz	Operatormethode	Bruch-/ Verhältnisgleichung	Klassischer Dreisatz
$\cdot 2$ 3 Stück ≙ 1,80 € $\cdot 2$ 6 Stück ≙ 3,60€	$3\text{ Stück} \xrightarrow{\cdot 0{,}60 \frac{€}{Stück}} x$ $x = 3 \cdot 0{,}60\,€ = 1{,}80\,€$	$\frac{1{,}80\,€}{3\,Stück} = \frac{x}{5\,Stück}$ $x = \frac{1{,}80\,€ \cdot 5\,Stück}{3\,Stück} = 3{,}00\,€$	:3 3 Stück ≙ 1,80 € :3 1 Stück ≙ 0,60€ $\cdot 6$ 6 Stück ≙ 3,60€ $\cdot 6$

Tabelle 1: Lösungsstrategien am Beispiel „Einkaufen“

Welche Strategie gewählt wird, hängt einerseits von der konkreten Aufgabe und dem darin gegebene Zahlenmaterial ab und andererseits von individuellen Präferenzen der Schülerinnen und Schüler (*Hafner,* 2012).

Durch die Vermittlung von tragfähigen Grundvorstellungen kann das flexible Einsetzen verschiedener Lösungsstrategien gefördert und der reinen Anwendung auswendig gelernter Schemata ohne tiefgründiges Verständnis entgegengewirkt werden.

Sowohl proportionale als auch antiproportionale Zuordnungen können in unterschiedlichen Formen dargestellt werden: algebraisch, graphisch, tabellarisch und verbal. Um mit unterschiedlichen Problemsituationen umgehen zu können, ist die Fähigkeit erforderlich, flexibel zwischen Darstellungsformen wechseln zu können. Da Darstellungswechsel Schülerinnen und Schülern häufig Schwierigkeiten bereiten (*Nitsch*, 2015), sollten diese im Unterricht besonders intensiv betrachtet werden. Anwendungsbezogene Aufgaben im Zusammenhang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen sollten zum Beispiel nicht immer nur die reine Übersetzung von Text zu Tabelle erfordern (*Greefrath*, 2018), sondern auch andere Darstellungswechsel in den Fokus rücken.

3.2. *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen* in KERMIT-8

Im Folgenden werden Aufgaben aus vergangenen KERMIT-8 Erhebungen dargestellt, in denen Proportionalität bzw. Antiproportionalität eine Rolle spielen. Diese Aufgaben werden hinsichtlich ihrer geforderten Kompetenzen analysiert.

Bei der Aufgabe „Tropfender Wasserhahn" geht es um den proportionalen Zusammenhang zwischen vergangener Zeit nach Beginn der Beobachtung eines tropfenden Wasserhahns und der Menge Wasser, die in dieser Zeit aus dem Hahn getropft ist. Für beide Teilaufgaben ist es notwendig, den Aufgabentext und die Tabelle in Teilaufgabe 1 und die Graphen in Teilaufgabe 2 sinnentnehmend zu erfassen (*Mathematisch kommunizieren* - K6) und zu erkennen, dass das gleichmäßige Tropfen mathematisch als ein proportionales Wachstum modelliert werden kann (*Mathematisch modellieren* - K3).

Beispielaufgabe 1: „Tropfender Wasserhahn“

Bei Familie Rector tropft seit einigen Tagen ein undichter Wasserhahn. Ben, der Sohn der Familie, will untersuchen, wie viel Wasser dabei verloren geht. Er fängt das gleichmäßig tropfende Wasser in einem Messbecher auf.

Teilaufgabe 1:

Ben sieht ab und zu nach, wie viel Wasser inzwischen im Messbecher ist. Die Tabelle zeigt Bens Messergebnisse.

Zeit in h	0,5	4
Wasser in cm^3	150	1200

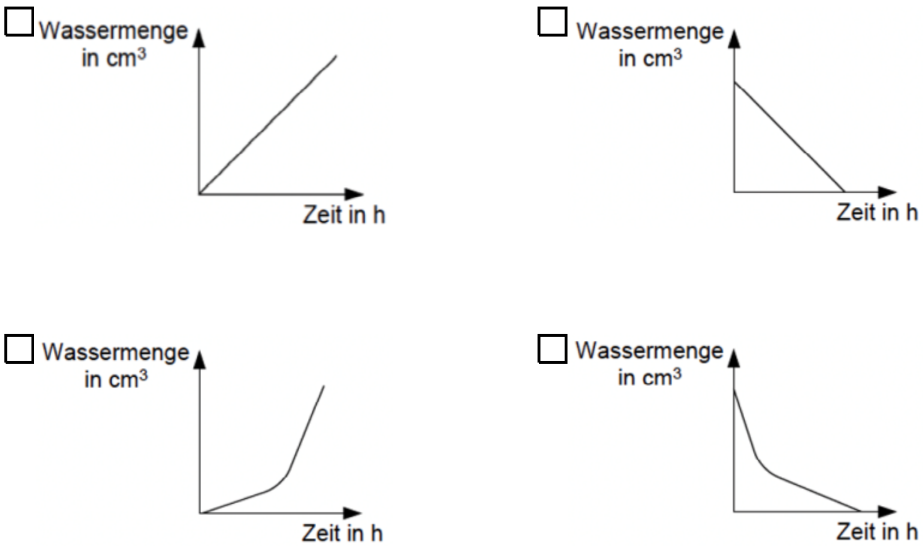
Gib an, wie viel nach zwei Stunden im Messbecher war.

.... cm^3

Teilaufgabe 2:

Welches Diagramm stellt die verlorene Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit am besten dar?

Kreuze an.



In Teilaufgabe 1 soll dann die Wassermenge nach 2 Stunden bestimmt werden. Für die Berechnung müssen die Schülerinnen und Schüler eines der in der Tabelle angegebenen Wertepaare nutzen. Mit einer der oben genannten Strategien (*individueller Dreisatz, Operatormethode, Bruch-/ Verhältnisgleichung, klassischer Dreisatz*) oder auch nicht standardisierten Variationen können sie dann den fehlenden Wert bestimmen. Hierbei handelt es sich um die Anwendung eines Routineverfahrens, weshalb ebenfalls die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) in geringem Maß gefordert wird. Auch wenn in der Erhebung nur das Ergebnis erfasst wird, macht es bei ähnlichen Aufgaben im Unterricht Sinn, den Lösungsweg der Schülerinnen und Schüler zu betrachten und verschiedene Lösungswege zu thematisieren. Auf diese Weise können unterschiedliche Grundvorstellungen zu proportionalen Zuordnungen in den Vordergrund rücken. So könnte bei der vorliegenden Aufgabe vor allem der individuelle Dreisatz als effiziente Lösungsstrategie thematisiert werden, da durch Vervierfachung des ersten angegebenen Wertepaares oder durch Halbierung des zweiten Wertepaares direkt der gesuchte Wert bestimmt werden kann.

Die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) steht in Teilaufgabe 2 im Vordergrund. Die Schülerinnen und Schüler müssen von einer verbal beschriebenen Situation zu einer graphischen Darstellung wechseln, um den passenden Graphen auszuwählen. Aus didaktischer Sicht sind Darstellungswechsel zwischen Text und Graph auch deshalb von Interesse, da hier – anders als bei der Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs als Funktionsgleichung – *symbolische, formale und technische Elemente der Mathematik* (K5) weitgehend ausgeklammert werden können. Hierdurch ergeben sich mindestens zwei Potenziale: Zum einen kann durch den Darstellungswechsel zwischen Text und Funktionsgraph direkt das Verständnis funktionaler Zusammenhänge von Schülerinnen und Schülern adressiert werden. Es wird keine zusätzliche Hürde dadurch errichtet, dass Schülerinnen und Schüler zum Beispiel mit Symbolen für Variablen arbeiten oder rechnerisch Lösungsverfahren durchführen. Zum anderen können auch solche funktionalen Zusammenhänge in den Blick genommen werden, die Lernenden auf algebraischer Ebene (noch) nicht bekannt sind. Damit kann zum Beispiel die Absicht verbunden werden, einer zu starken Überbetonung bestimmter funktionaler Zusammenhänge entgegenzuwirken. Nimmt man im Unterricht stets nur eine einzige Funktionsart in den Blick, besteht die Gefahr, bei Schülerinnen und Schülern den Eindruck hervorzurufen, dass im Grunde alle funktionalen Zusammenhänge proportional, antiproportional usw. sind.

Daher sollte an verschiedenen Stellen in unterschiedlichen Jahrgangsstufen das Verständnis der Lernenden von funktionalen Zusammenhängen gefordert und gefördert werden. Lernaufgaben können so aussehen, dass Schülerinnen und Schüler zu einer in einem Text geschilderten Situation einen Graphen skizzieren oder umgekehrt zu einem Graphen eine Geschichte entwickeln. Zur Überprüfung, zum Beispiel in Klassenarbeiten, können Aufgaben wie diese mit geschlossenen Antwortformaten verwendet werden. In höheren Jahrgangsstufen können dann die Aufgaben auch durch verschiedene Funktionstypen bereichert werden.

Beispielaufgabe 2: „Fliesen“

Zum Fliesen eines Küchenbodens werden 100 Platten mit einer Größe von jeweils $0{,}16\,m^2$ benötigt. Der Besitzer entschließt sich dann aber doch, Fliesen der Größe $0{,}2\,m^2$ verlegen zu lassen. Gib an, wie viele Fliesen jetzt mindestens benötigt werden. .... Fliesen

In der Aufgabe „Fliesen“ geht es um den funktionalen Zusammenhang zwischen der Größe einer Fliese und der Anzahl der für die Küche benötigten Fliesen. Die Schülerinnen und Schüler sollen annehmen, dass es sich hierbei um einen antiproportionalen Zusammenhang handelt. Zur Bearbeitung der Aufgabe sind dem Aufgabentext zunächst die relevanten Informationen (z.B. Anzahl der benötigten kleineren Fliesen) zu entnehmen (*Mathematisch kommunizieren* - K6). Zur Lösung der Aufgabe können wieder die im vorherigen Kapitel beschriebenen Strategien angewendet werden. Unter anderem bietet sich besonders die Bruch- und Verhältnisgleichung an, die im Folgenden anhand der Aufgabe „Fliesen“ dargestellt wird.

Bruch- Verhältnisgleichung: $\frac{0{,}16}{0{,}2} = \frac{x}{100}$

$$x = \frac{0{,}16 \cdot 100}{0{,}2} = 80$$

Alternativ kann so vorgegangen werden, dass zuerst die Größe der auszulegenden Fläche berechnet wird ($16\,m^2$). Hierbei kommt die Produktvorstellung zum Tragen. Anschließend kann dann mittels der Antiproportionalitätsvorstellung die Anzahl der Fliesen bestimmt werden, die bei den neuen größeren Fliesen benötigt wird ($16m^2 : 0{,}2m^2 = 80$m). Dies stellt die Operatormethode bei antiproportionalen Zusammenhängen dar. Diese Aufgabe fordert und fördert dementsprechend die Anwendung von Routineverfahren sowie den Umgang mit vertrauten Symbolen (*Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* - K5).

Bei Verwendung dieser oder ähnlicher Aufgaben im Unterricht sollten vor allem Vereinfachungen thematisiert werden, die getroffen werden, um den Kontext als antiproportionale oder proportionale Zuordnung zu modellieren. Bei der Aufgabe „Fliesen“ werden vor allem zwei Aspekte Zwecks einer Vereinfachung außer Acht gelassen. Einerseits wird die Form der Fläche des Küchenbodens und andererseits die Form der Fläche der Fliesen nicht berücksichtigt. Diese könnten jedoch entscheidend dafür sein, wie viele Fliesen letztendlich benötigt werden, wenn man den potenziellen Verschnitt miteinbezieht. Aufgrund des unterschiedlichen Verschnitts, je nachdem welche Fliesen verlegt werden, kann der Zusammenhang dann nicht mehr als antiproportional behandelt werden. Es sollte thematisiert werden, wie in der Realität in solch einer Situation vorgegangen werden würde. Vermutlich würde eher zuerst die Länge und Breite des Raumes ausgemessen werden, um dann die Anzahl der benötigten Fliesen zu bestimmen, indem berechnet wird, wie viele Fliesen in die Länge bzw. Breite passen. Geht es darum, wie viele Fliesen letztendlich bestellt werden sollten, um den gesamten Raum zu fliesen, würde man vermutlich einige Fliesen in Reserve mitbestellen, falls bei der Arbeit welche kaputt gehen. Das Treffen und Beschreiben von Annahmen und Vereinfachungen ist vor allem hinsichtlich des *Mathematischen Modellierens* (K3) eine wichtige Kompetenz, die bei den Schülerinnen und Schülern gefördert werden sollte.

Insgesamt konnte anhand der beiden Aufgaben vergangener KERMIT-8 Erhebungen zu proportionalen bzw. antiproportionalen Zuordnungen gezeigt werden, inwiefern verschiedene Grundvorstellungen zum Tragen kommen, welche Lösungsstrategien je nach Aufgabe sinnvoll zu thematisieren sind und warum auch Darstellungswechsel von großer Bedeutung sind.

3.3. Abschließende Anmerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die KERMIT-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Raum und Form* ist dies der Schwerpunkt *Räumliche Geometrie*, im Bereich der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* der Schwerpunkt *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben in Teil III der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den kommenden Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

4. Aufgaben zur Leitidee *Funktionaler Zusammenhang*: Schwerpunktthema *proportionale und antiproportionale Zuordnungen*

4.1. Proportionale und antiproportionale Zuordnungen in außer-mathematischen Kontexten

Testheft B – Aufgabe 19: Ferienhaus

Eine Gruppe aus Freunden hat ein großes Ferienhaus mit Platz für maximal 25 Personen für insgesamt 3000 € angemietet. Der Preis wird gleichmäßig auf alle Personen aufgeteilt.

Teilaufgabe 19.1

Es fahren 20 Personen mit.

Gib an, wie viel jeder bezahlen muss.

MA4611

.... €

Auswertung

RICHTIG	150

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1a
Bildungsstandards	4.03h, 4.04m

Teilaufgabe 19.2

Gib an, ab wie vielen Personen jede Person weniger als 140 € bezahlen muss.

ab .... Personen

MA4612

Auswertung

RICHTIG	22

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	4.03h, 4.04m

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Ferienhaus“ geht es um den antiproportionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der mitfahrenden Personen und dem Preis pro Person für ein Ferienhaus. Daher die Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen. In beiden Teilaufgaben muss zwischen Realität und Mathematik übersetzt werden, um den Preis pro Personen bzw. die Anzahl der mitfahrenden Personen zu bestimmen. Daher ist die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) erforderlich. Zusätzlich wird die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) angesprochen, da der Gesamtpreis durch die Anzahl der Personen bzw. durch den Preis pro Person dividiert werden muss.

Die erste Teilaufgabe ist dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen, da ein direkt erkennbares Modell genutzt wird und dieses mithilfe von Routineverfahren gelöst werden kann. Die zweite Teilaufgabe ist in *Anforderungsbereich II* einzuordnen, da das Ergebnis der Modellierung zusätzlich im Kontext interpretiert bzw. sinnvoll gerundet werden muss.

Testheft C – Aufgabe 16: Kopierer

Ein Kopierer kopiert gleichmäßig 300 Seiten in 12 Minuten.

Teilaufgabe 16.1

Gib an, wie viel Zeit dieser Kopierer braucht, um 50 Seiten zu kopieren.

MA4577
.... Minuten

Auswertung

RICHTIG	2

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	4.03h; 4.04m

Teilaufgabe 16.2

Gib an, wie viele Seiten dieser Kopierer in 15 Minuten kopiert.

MA4578
.... Seiten

Auswertung

RICHTIG	375

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	4.03h; 4.04m

Teilaufgabe 16.3

Gib an, wie viele dieser Kopierer man mindestens braucht, um in 20 Minuten 2200 Seiten zu kopieren.

MA4579 .... Kopierer

Auswertung

RICHTIG	5

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	4.03h; 4.04m

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Kopierer“ gehört zur Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4), da mit einer propor-tionalen Zuordnung verständnisorientiert umgegangen werden muss.

In allen drei Teilaufgaben findet eine Übersetzung zwischen Realität (Zusammenhang zwischen Zeit und Anzahl der kopierten Seiten) und Mathematik (proportionale Zuordnung) statt. Daher ist die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) erforderlich. Der Dreisatz bildet die rechnerische Grundlage für alle drei Teilaufgaben. Daher ist ebenfalls die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich.

Die ersten beiden Teilaufgaben sind in *Anforderungsbereich I* einzuordnen, da es sich um Routineaufgaben handelt. Aufgrund der Mehrschrittigkeit ist die dritte Teilaufgabe in *Anforderungsbereich II* einzuordnen.

Testheft B – Aufgabe 21: Waffeln backen

Cem möchte Waffeln backen. Er hat ein Rezept für 4 Personen gefunden.

Rezept für 4 Personen

300 g Mehl
180 g Zucker
1/4 Liter Milch
4 Eier
100 g Butter
1 Päckchen Vanillezucker

Alle Zutaten verrühren und portionsweise ca. 5 Minuten im Waffeleisen backen.

Cem möchte für 6 Personen Waffeln backen und schreibt dafür das ursprüngliche Rezept um.

Ergänze die fehlenden Mengenangaben für Mehl und Zucker.

Rezept für 6 Personen

MA4575 .... g Mehl
MA4576 .... g Zucker

3/8 Liter Milch
6 Eier
150 g Butter
1 ½ Päckchen Vanillezucker

Alle Zutaten verrühren und portionsweise ca. 5 Minuten im Waffeleisen backen.

Auswertung

RICHTIG	450 UND 270

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	4.03h, 4.04m

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Waffeln backen“ steht der proportionale Zusammenhang zwischen der Anzahl der Personen und der Menge der benötigten Zutaten im Fokus. Daher ist die Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen.

Zunächst wird in der Aufgabe die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) verlangt, da sowohl aus dem Aufgabentext als auch aus dem dargestellten Rezept die benötigten Informationen entnommen werden müssen. Zudem ist eine Übersetzung zwischen Realität und Mathematik erforderlich, um die fehlenden Mengenangaben zu berechnen. Daher wird in dieser Aufgabe ebenfalls die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) angesprochen. Die Berechnungen basieren auf mathematischen Routineverfahren, weshalb zusätzlich die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich ist.

Da bei der Modellierung ein direkt erkennbares Modell genutzt wird, ist die Aufgabe in *Anforderungsbereich I* einzuordnen.

Testheft B – Aufgabe 22: Das Geschenk

Anna, Julia und Yasmin möchten zusammen ein Parfüm als Geschenk für eine Freundin kaufen. Sie haben ausgerechnet, dass jede von ihnen 9,60 € für das Geschenk bezahlen muss.

Lea möchte sich nun auch noch an diesem Geschenk beteiligen.

Gib an, wie viel jedes der vier Mädchen bezahlen muss, wenn alle gleich viel bezahlen.

MA4587 €

Auswertung

RICHTIG	7,20

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	4.03h, 4.04m

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Das Geschenk“ geht es um den antiproportionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Personen, die bei einem Geschenk mitschenken und dem Preis pro Person. Daher ist die Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen.

Da die reale Situation in ein mathematisches Modell übersetzt werden muss, wird die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) angesprochen. Das Arbeiten mit dem mathematischen Modell erfordert zusätzlich den *Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik* (K5).

Da es sich um ein direkt erkennbares Modell handelt und Routineverfahren für die Berechnung ausreichen, ist die Aufgabe in *Anforderungsbereich I* einzuordnen.

Testheft C – Aufgabe 18: Pralinenpackung

In einer Konditorei werden zwei unterschiedliche Pralinensorten angeboten. Eine Praline vom Typ „Süße Verführung“ kostet 25 Cent, eine Praline vom Typ „Herbe Wahrheit“ 30 Cent. In eine Geschenkpackung passen insgesamt 23 Pralinen.

Herr Giesebrecht kauft eine Geschenkpackung mit 23 Pralinen und bezahlt 6,55 Euro.

Wie viele Pralinen von jeder Sorte sind in der Packung enthalten?

MA4581

.... Pralinen „Süße Verführung“

MA4582

.... Pralinen „Herbe Wahrheit“

Notiere deinen Lösungsweg.

MA4583

Auswertung

RICHTIG	7 UND 16 **UND** Lösungsweg, der erkennen lässt, dass 7 Pralinen der „Süßen Verführung“ und 16 Pralinen der „Herben Wahrheit“ zusammen einen Wert von 6,55 € haben. **Beispiel(e)** • $7 \cdot 25 + 16 \cdot 30 = 655$

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4
Bildungsstandards	4.07m

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Pralinenpackung“ geht es um den proportionalen Zusammenhang zwischen Menge und Preis unterschiedlicher Pralinensorten. Daher ist die Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen.

Zur Lösung der Aufgabe müssen heuristische Strategien angewendet werden (z. B. systematisches Probieren). Hierzu ist die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) erforderlich. Zusätzlich wird die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen*

Elementen der Mathematik umgehen (K5) angesprochen, da Berechnungen durchgeführt werden.

Es handelt sich um keine Routineaufgabe und die Lösung der Aufgabe erfordert den Einsatz heuristischer Strategien. Daher kann die Aufgabe in den *Anforderungsbereich II* eingeordnet werden.

Testheft B – Aufgabe 23: Honorar für Autoren

Die Autoren eines Buches erhalten als Honorar zusammen 12 % des Verkaufspreises.
Den Betrag teilen sie gleichmäßig unter sich auf.

Teilaufgabe 23.1

Ein Buch wird von fünf Autoren gemeinsam geschrieben.

Gib an, wie viel Prozent des Verkaufspreises ein Autor jeweils erhält.

MA4614
.... %

Auswertung

RICHTIG	2,4

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	4.03h, 4.04m

Teilaufgabe 23.2

Das Buch wird zu einem Preis von 20 € pro Stück verkauft. Es werden 500 Bücher verkauft.

Gib an, wie viel Geld die Autoren zusammen insgesamt erhalten.

MA4615
.... €

Auswertung

RICHTIG	1200

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5
Bildungsstandards	1.07; 4.03h; 4.04m

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Honorar für Autoren" geht es in der ersten Teilaufgabe um den antiproportionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Autoren und dem zustehenden Anteil des Verkaufspreises je Autor. In der zweiten Teilaufgabe geht es um den proportionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der verkauften Bücher und der Geldsumme, die die Autoren insgesamt erhalten. Daher gehören beide Teilaufgaben zur Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4).

In beiden Teilaufgaben muss der gegebene Kontext in ein mathematisches Modell überführt werden, weshalb die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) angesprochen wird. Um im mathematischen Modell zu arbeiten, werden einfache Routineverfahren benötigt. Daher wird zusätzlich die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) angesprochen.

Die erste Teilaufgabe ist dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen, da das mathematische Modell direkt erkennbar ist. Für die Modellierung in der zweiten Teilaufgabe sind hingegen mehrere Schritte notwendig, weshalb diese Teilaufgabe im *Anforderungsbereich II* zu verorten ist.

Testheft B – Aufgabe 25: Währungen

Preise können in verschiedenen Währungen angegeben werden.

Ein Preis von 5 Euro entspricht einem Preis von 37 Dänischen Kronen (DKK).

Die Zuordnung Preis in Euro → Preis in Dänischen Kronen ist (direkt) proportional.

Wie vielen Dänischen Kronen entspricht ein Preis von 15 €?

MA4620

.... DKK

Auswertung

RICHTIG	111

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	4.03h

Testheft C – Aufgabe 17

Wie viel Euro entspricht ein Preis von 88,80 DKK?

MA4580

.... €

Auswertung

RICHTIG	12

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	4.03h

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Währungen“ geht es um den proportionalen Zusammenhang zwischen Preis in Euro und Preis in dänischen Kronen. Daher gehört die Aufgabe zur Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4).

Für die Umrechnung von Euro in Kronen und andersherum ist der *Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik* (K5) erforderlich.

Die erste Teilaufgabe kann dem *Anforderungsbereich I* zugeordnet werden, da der gesuchte Wert durch eine einfache Multiplikation bestimmt werden kann. Die zweite Teilaufgabe hingegen erfordert einen weiteren Zwischenschritt und die zugrundeliegenden Rechenwerte sind als komplexer anzusehen, weshalb diese Teilaufgabe im *Anforderungsbereich II* zu verorten ist.

Testheft C – Aufgabe 21: 40 Zoll

---

1 Zoll entspricht 2,54 cm.

Die Bildschirmdiagonale eines Fernsehers hat eine Länge von 40 Zoll.

Gib die Länge dieser Diagonalen in Zentimetern an.

Die Länge der Diagonalen beträgt .... cm.

MA4588

Auswertung

RICHTIG	101,6 Beispiel(e) • Grenzfall: 102

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	4.03h

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „40 Zoll" ist der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen, da es in dieser Aufgabe um den proportionalen Zusammenhang zwischen den Maßeinheiten Zoll und Zentimeter geht.

Für die Berechnung der Bildschirmdiagonale des gegebenen Fernsehers ist lediglich die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich.

Da es sich um ein einschrittiges Routineverfahren handelt, ist diese Aufgabe im *Anforderungsbereich I* einzuordnen.

Testheft B – Aufgabe 26: Stundenlohn

Teilaufgabe 26.1

Hendrik verdient in 18 Stunden 306 €.

Gib an, wie viele Stunden er bei gleichem Stundenlohn für 408 € arbeiten muss.

MA4621

.... Stunden

Auswertung

RICHTIG	24

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	4.03h, 4.04m

Teilaufgabe 26.2

Als Aushilfe erhält Jan in einem Betrieb für sechs Stunden 78 €. Ole erhält in einem anderen Betrieb für neun Stunden 108 €.

Vergleiche beide Stundenlöhne.

Kreuze an.

- ☐ Der Stundenlohn von Jan ist höher.
- ☐ Der Stundenlohn von Ole ist höher.
- ☐ Die Stundenlöhne sind beide gleich hoch.
- ☐ Die Stundenlöhne können mit diesen Informationen nicht berechnet werden.

Auswertung

RICHTIG	☒ Der Stundenlohn von Jan ist höher. ☐ Der Stundenlohn von Ole ist höher. ☐ Die Stundenlöhne sind beide gleich hoch. ☐ Die Stundenlöhne können mit diesen Informationen nicht berechnet werden.

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	4.03h, 4.04m

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Stundenlohn“ geht es um den proportionalen Zusammenhang zwischen den gearbeiteten Stunden und dem Lohn. Daher ist diese Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen.

Testheft B – Aufgabe 28: Pizza

In einer Pizzeria werden Pizzen vom Blech in zwei verschiedenen Größen zum Mitnehmen angeboten.

Familienpizza

60 cm x 40 cm   für 6 Personen   25,80 €

Partypizza

100 cm x 35 cm   für 10 Personen   39,00 €

Für eine Feier mit 60 Personen sollen entweder zehn Familienpizzen oder sechs Partypizzen bestellt werden.

Gib den Preisunterschied zwischen diesen beiden Möglichkeiten an.

MA4623

.... €

Auswertung

RICHTIG	24

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) Mathematisch kommunizieren (K6)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	4.03h

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Pizza“ geht es um den proportionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Pizzen und dem Preis. Daher ist diese Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen.

Es wird die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (K6) verlangt, da sowohl aus dem Text als auch aus der Abbildung die notwendigen Informationen entnommen werden müssen. Zusätzlich muss ein *mathematisches Modell* (K3) gebildet werden, um den Preisunterschied zwischen den beiden angegebenen Möglichkeiten zu berechnen. Für die Berechnung ist die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich.

Aufgrund der Mehrschrittigkeit ist die Aufgabe in *Anforderungsbereich II* einzuordnen.

Anregungen für den Unterricht

Alle zuvor dargestellten Aufgaben befassen sich mit einem **außermathematischen Kontext**. Der außermathematische Kontext ist wichtig, um die Bedeutung des Mathematikunterrichts im Alltag zu erkennen.

Während der Kontext in den Aufgaben „Waffeln backen“, „Kopierer“, „Stundenlohn“, „Pizza“, „Ferienhaus“, „Das Geschenk“ und „Honorar für Autoren“ eine größere Rolle einnimmt, ist der Kontext in den Aufgaben „40 Zoll“ und „Währungen“ eher zweitrangig bzw. austauschbar. Die Aufgaben in diesem Kapitel basieren auf Kontexten, die entweder einen proportionalen oder antiproportionalen Zusammenhang aufweisen.

Um zu erkennen, ob einem Sachverhalt ein proportionaler oder antiproportionaler Zusammenhang zugrunde liegt, werden oftmals Merksätze wie „Je mehr, desto mehr“ oder „Je weniger, desto weniger“ für proportionale Zusammenhänge und „Je mehr, desto weniger“ oder „Je weniger, desto mehr“ für antiproportionale Zusammenhänge eingesetzt. Diese Merksätze sind jedoch kritisch zu betrachten, da sie nur begrenzt zur eindeutigen Identifizierung beider Funktionstypen beitragen (*Heiderich & Hußmann*, 2013). Vielmehr sollten die Eigenschaften der Begriffe sowie verschiedene Grundvorstellungen im Mittelpunkt stehen: Bei proportionalen Zusammenhängen sind es Merkmale wie die Quotientengleichheit, während bei antiproportionalen Zusammenhängen die Produktgleichheit eine zentrale Rolle spielt. Auf algebraischer Ebene können die Schülerinnen und Schüler prüfen, ob der Sachzusammenhang durch eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = \frac{a}{x}$ für proportionale oder $f(x) = mx$ für antiproportionale Beziehungen darstellbar ist. Für antiproportionale Zusammenhänge bedeutet dies, dass das Produkt der beiden Größen stets einen konstanten Wert *c* ergibt, während für proportionale Zusammenhänge der Quotient der beiden Größen konstant bleibt. Ebenso kann überlegt werden, ob der Sachverhalt graphisch als Gerade durch den Ursprung (proportional) oder als Hyperbel (antiproportional) dargestellt werden kann.

In den Aufgaben „Waffeln backen“, „Kopierer“, „Stundenlohn“, „Pizza“, „Ferienhaus“, „Das Geschenk“ und „Honorar für Autoren“ steht das **Mathematische Modellieren** bzw. stehen die Teilkompetenzen des Modellierens *Mathematisieren* und *mathematisch Arbeiten* im Fokus. Dies lässt sich anhand der ersten Teilaufgabe der Aufgabe „Kopierer“ exemplarisch an einem Modellierungskreislauf (siehe Abbildung 4) visualisieren.

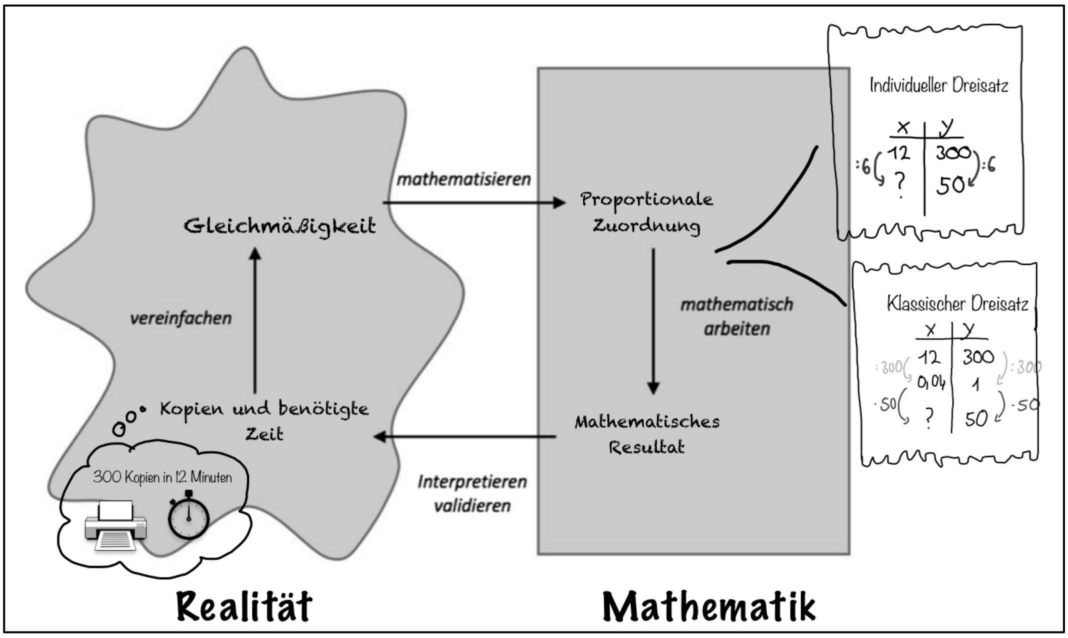


Abbildung 4: Modellierungskreislauf im Kontext der Aufgabe „Kopierer“

Ausgehend von der *realen Situation* (300 Kopien in 12 Minuten) und der vorgegebenen *Vereinfachung*, dass der Kopierer gleichmäßig kopiert, erfordert die Aufgabe keine weiteren *Vereinfachungen* oder *Annahmen*. Im Unterrichtsdiskurs sollten *Vereinfachungen* und getroffene *Annahmen* explizit thematisiert und hinterfragt werden (*Greefrath*, 2018). Im Hinblick auf diesen Kontext kann das gleichmäßige Kopieren vor allem bei großen Mengen an Kopien hinterfragt werden, da zum Beispiel zusätzlich Zeit zum Nachlegen des Papieres mitberücksichtigt werden könnte. In anderen Kontexten, wie zum Beispiel dem Einkaufen, welches häufig im Zusammenhang mit proportionalen Zuordnungen verwendet wird, werden Angebote und Rabatte oftmals vereinfachend nicht mitberücksichtigt. Es wird daher empfohlen, proportionale Modelle mit authentischen „Rabatt-Modellen“ mithilfe einer digitalen Tabellenkalkulation gegenüberzustellen und zu vergleichen (*Greefrath et al.*, 2024; für ein konkretes Beispiel im Kontext Einkaufen siehe S. 122).

Beim *Mathematisieren* wechseln die Schülerinnen und Schüler von der Realität in die Mathematik. In der ersten Teilaufgabe der Aufgabe „Kopierer“ können unterschiedliche Strategien genutzt werden. Abbildung 4 zeigt sowohl den *individuellen* als auch den *klassischen Dreisatz* als Lösungsstrategie. Der *individuelle Dreisatz* ist dabei besonders vorteilhaft, da der gesuchte Wert direkt durch Division („Runterrechnen“) der gegebenen Werte ermittelt werden kann. Daher wird bei dieser Vorgehensweise vor allem die *Vervielfachungsvorstellung* aktiviert. Eine ausführliche Gegenüberstellung und Erläuterung der Grundvorstellungen zu proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen sind im kommenden Kapitel der didaktischen Handreichung zu finden.

In der zweiten Teilaufgabe der Aufgabe „Kopierer“ wird vermutlich häufiger der klassische Dreisatz als Lösungsstrategie herangezogen, da der passende Faktor, mit dem das gegebene Wertepaar multipliziert werden muss, nicht unmittelbar ersichtlich ist. Beim klassischen Dreisatz erfolgt zuerst der Zwischenschritt, bei dem die Anzahl der Kopien pro Minute berechnet wird, bevor in einem folgenden Schritt dann die Anzahl der Kopien pro Minute auf 12 Minuten hochgerechnet wird.

Neben dem Dreisatz werden in den didaktischen Handreichungen Teil II auch die *Operatormethode* sowie die *Bruch-/ Verhältnisgleichung* als Lösungsstrategie von Aufgaben, für die Proportionalität bzw. Antiproportionalität vorausgesetzt wird, erläutert. Der Rückgriff auf die Operatormethode eignet sich vor allem zur Lösung der Aufgabe „Pizza“, da der Proportionalitätsfaktor (Preis pro Pizza) vorgegeben ist. Hier wird der Proportionalitätsfaktor dann mit der Anzahl der Pizzen multipliziert. Bei der Bruch-/ Verhältnisgleichung wird die Verhältnisvorstellung oder die Quotientenvorstellung genutzt, um eine Bruchgleichung aufzustellen, um so den gesuchten Wert zu bestimmen. Am Beispiel der Aufgabe „Währungen“ könnte der Lösungsweg mit dieser Strategie wie folgt aussehen:

$$\frac{37\ DKK}{5\ €} = \frac{x}{15\ €}$$

$$x = \frac{37\ DKK \cdot 15\ €}{5\ €} = 111\ DKK$$

Im Unterricht sollten **verschiedene Lösungsstrategien** der Schülerinnen und Schüler thematisiert und hinsichtlich ihrer Richtigkeit und Effektivität diskutiert werden. Im Fokus steht daher nicht allein das Ziel, also das korrekte Ergebnis, sondern vor allem die verschiedenen Lösungswege selbst.

Unter dem folgenden Link finden sich weitere Aufgaben mit außermathematischem Kontext, bei denen ein proportionaler bzw. antiproportionaler Zusammenhang zugrunde liegt:

https://de.serlo.org/8103

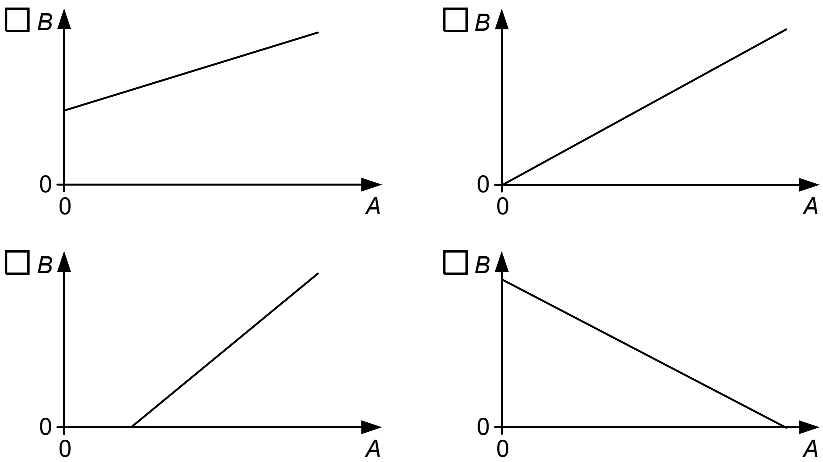
Diese können im Unterricht als **weiterführendes Material** genutzt werden, um verschiedene Lösungswege zu diskutieren. Es ist sinnvoll, Aufgaben zu proportionalen, antiproportionalen oder auch zu anderen funktionalen Zusammenhängen zu mischen, damit die Schülerinnen und Schüler gezielt überlegen müssen, welcher Zusammenhang der jeweiligen Aufgabe zugrunde liegt.

4.2. Darstellungsformen und Darstellungswechsel

Testheft B – Aufgabe 20: Zuordnungen

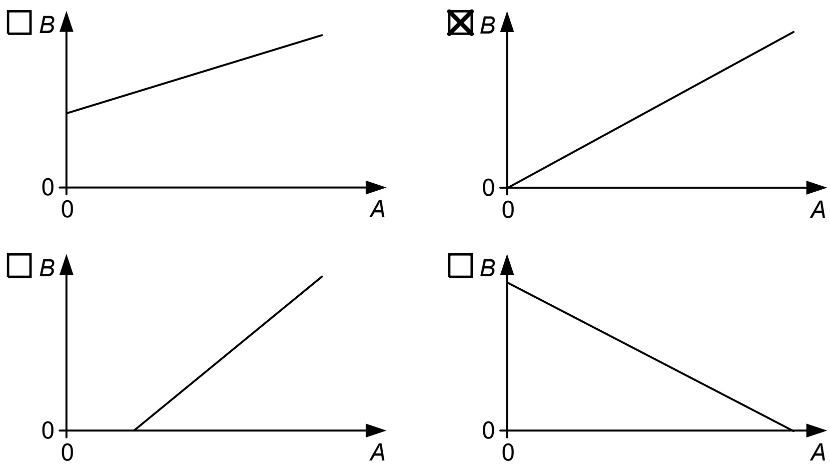
Welches Diagramm zeigt den Graphen einer (direkt) proportionalen Zuordnung zwischen den Größen *A* und *B*?

Kreuze an.



MA4613

Auswertung

RICHTIG	

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	4.03m

Aufgabenbezogener Kommentar

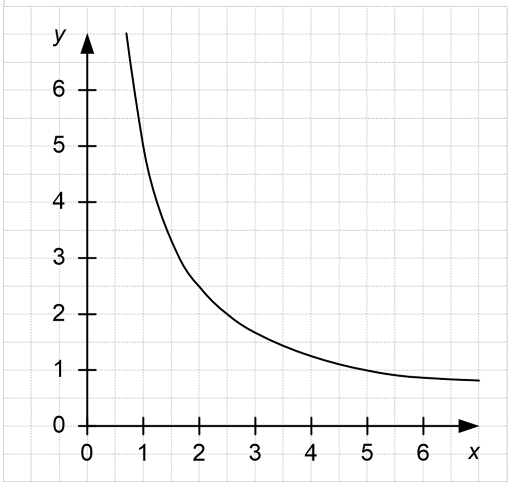
Die Aufgabe „Zuordnungen“ ist der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen, da der passende Graph zu einer proportionalen Zuordnung gefunden werden muss.

Um die passende Gerade zu identifizieren, ist der Umgang mit *Mathematischen Darstellungen* (K4) erforderlich.

Da es sich um eine vertraute Darstellung handelt, wird diese Aufgabe im *Anforderungsbereich I* verortet.

Testheft C – Aufgabe 19: Graphen lesen

Gegeben ist der Graph einer antiproportionalen (indirekt proportionalen) Zuordnung.



Prüfe die folgenden Aussagen zu dieser Zuordnung.

Kreuze jeweils an.

		wahr	falsch
MA4584	Verdoppelt sich der x-Wert, so halbiert sich der y-Wert.	☐	☐
MA4585	Für alle Wertepaare gilt $x \cdot y = 5$.	☐	☐
MA4586	Je größer die x-Werte, desto kleiner die y-Werte.	☐	☐

Auswertung

RICHTIG

	wahr	falsch
Verdoppelt sich der x-Wert, so halbiert sich der y-Wert.	☒	☐
Für alle Wertepaare gilt $x \cdot y = 5$.	☒	☐
Je größer die x-Werte, desto kleiner die y-Werte.	☒	☐

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5
Bildungsstandards	4.03m

Aufgabenbezogener Kommentar

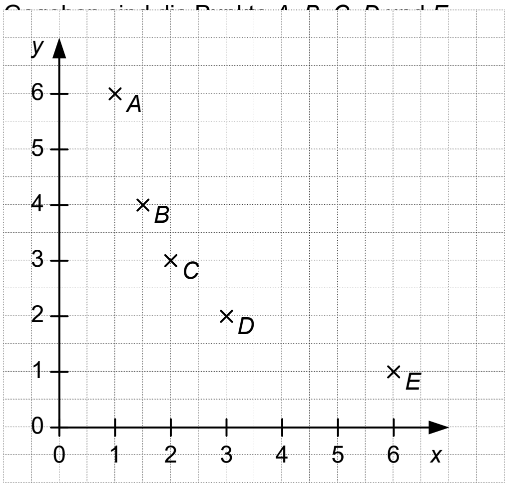
In der Aufgabe „Graphen lesen“ müssen verschiedene Aussagen zu einem Graphen eines antiproportionalen Zusammenhangs geprüft werden. Daher ist diese Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen.

Der Umgang mit dem Graphen erfordert die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4). Die ersten beiden Aussagen können überprüft werden, indem verschiedene Koordinaten des Graphen in die Gleichungen eingesetzt werden. Somit wird hier zusätzlich die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) angesprochen. Die dritte Aussage kann entweder über den Abruf von Wissen über antiproportionale Zuordnungen (K5) oder durch Betrachten des Graphen (K4) geprüft werden.

Die Aufgabe erfordert einen Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen, da verbal dargestellte Aussagen durch eine graphische Darstellung überprüft werden müssen. Daher ist die Aufgabe dem *Anforderungsbereich II* zuzuordnen.

Testheft B – Aufgabe 24: Punkte im Koordinatensystem

Gegeben sind die Punkte A, B, C, D und E.



Gib die Koordinaten der Punkte *A* und *B* an.

A (..........|..........)   *B* (..........|..........)

MA4616   MA4618

Auswertung

RICHTIG	*A* (1 | 6) UND *B* (1,5 | 4)

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	4.02h

Testheft C – Aufgabe 23

Die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und *E* gehören zu einer antiproportionalen (indirekt proportionalen) Zuordnung.

Gib die Koordinaten eines weiteren Punktes *F* an, der zu dieser Zuordnung passt.

F (..........|.........) MA4593

Auswertung

RICHTIG	Zahl *x* UND Zahl *y*, für die gilt $x \cdot y = 6$ [Anm.: Der Punkt *F* darf nicht gleich der Punkte *A, B, C, D* oder *E* sein.]

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5
Bildungsstandards	4.02m

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Punkte im Koordinatensystem“ ist der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen, da das Arbeiten mit einem Graphen einer antiproportionalen Zuordnung im Fokus steht.

In der ersten Teilaufgabe müssen lediglich zwei Punkte der antiproportionalen Zuordnung abgelesen werden. Daher ist die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) erforderlich. In der zweiten Teilaufgabe hingegen muss ein weiterer Punkt, der zu dieser Zuordnung passt, angegeben werden. Hierzu müssen die in dem Graphen vorgegebenen Punkte der antiproportionalen Zuordnung genutzt werden. Daher wird auch in der zweiten Teilaufgabe die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) angesprochen. Darüber hinaus muss eine geeignete heuristische Strategie gefunden werden, um einen weiteren beliebigen Punkt angeben zu können. Dies erfordert die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2). Mithilfe der angegeben Wertepaare kann zum Beispiel rechnerisch der Antiproportionalitätsfaktor 6 bestimmt werden, um so ein weiteres Wertepaar zu finden. Hierzu ist ebenfalls die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich.

Die erste Teilaufgabe ist dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen, da für das Ablesen der Punkte eine vertraute Darstellung in Form eines Graphens genutzt wird. Da die zweite Teilaufgabe den Einsatz von heuristischen Strategien erfordert und somit keine Routineaufgabe darstellt, wird diese Aufgabe im *Anforderungsbereich II* verortet.

Testheft C – Aufgabe 22: Proportionalität

Teilaufgabe 22.1

x und *y* sind (direkt) proportional zueinander.

Ergänze die beiden fehlenden Werte in der Tabelle.

MA4589

MA4590

x	5	10	
y	8		4

Auswertung

RICHTIG

x	5	10	2,5
y	8	16	4

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	4.02m

Teilaufgabe 22.2

a und *b* sind antiproportional (indirekt proportional) zueinander.

Ergänze die beiden fehlenden Werte in der Tabelle.

MA4591

MA4592

a	1	2	
b	10		0,5

Auswertung

RICHTIG

a	1	2	20
b	10	5	0,5

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	5
Bildungsstandards	4.03h

Aufgabenbezogener Kommentar

In der Aufgabe „Proportionalität" geht es in der ersten Teilaufgabe um einen proportionalen Zusammenhang und in der zweiten Teilaufgabe um einen antiproportionalen Zusammenhang. Daher ist die Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen.

Es sind tabellarisch Wertepaare gegeben, auf deren Grundlage fehlende Werte in der Tabelle ergänzt werden müssen. Dies erfordert den *Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik* (K5).

Da für die Berechnungen mathematische Routineverfahren ausreichen, wird diese Aufgabe in *Anforderungsbereich I* eingeordnet.

Testheft B – Aufgabe 29: Proportional

Gegeben ist eine (direkt) proportionale Zuordnung. Sie ordnet dem *x*-Wert 3 den *y*-Wert 7,5 zu.

Welches weitere Wertepaar (*x* | *y*) gehört zu dieser (direkt) proportionalen Zuordnung?

Kreuze an.

☐ (7,5 | 3) ☐ (6 | 12) ☐ (4 | 10) ☐ (1 | 1,5)

Auswertung

RICHTIG	☐ (7,5 | 3)	☐ (6 | 12)	☒ (4 | 10)	☐ (1 | 1,5)

Merkmale

Leitidee	Funktionaler Zusammenhang (L4)
Allgemeine Kompetenzen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4
Bildungsstandards	4.02m

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Proportional" ist der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* (L4) zuzuordnen, da es um Wertepaare einer proportionalen Zuordnung geht.

Zu den gegebenen Koordinaten einer proportionalen Zuordnung müssen weitere passende Koordinaten identifiziert werden. Dies kann zum Beispiel durch Anwendung des Dreisatzes erfolgen, wofür die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* (K5) erforderlich ist.

Da es sich um ein Routineverfahren handelt, ist die Aufgabe im *Anforderungsbereich I* zu verorten.

Anregungen für den Unterricht

Funktionale Zusammenhänge können in unterschiedlichen Formen dargestellt werden. Während in Funktionale Zusammenhänge können in unterschiedlichen Formen dargestellt werden. Während in den Aufgaben des vorherigen Kapitels (Proportionale und antiproportionale Zuordnungen in außermathematischen Kontexten) der proportionale Zusammenhang verbal dargestellt wird, werden in den Aufgaben „Zuordnungen“, „Graph lesen“, Punkte im Koordinatensystem“, „Proportionalität“ und „Proportional“ graphische, tabellarische bzw. symbolische Darstellungen genutzt.

Um verständnisorientiert mit proportionalen Zuordnungen umgehen zu können, sollte man **verschiedene Formen der Darstellung** interpretieren, erstellen und anwenden können *(Greefrath et al.*, 2016).

In der Aufgabe „Proportionalität“ ist eine unvollständige Wertetabelle mit einem Wertepaar und zwei weiteren Werten gegeben. Die fehlenden Werte lassen sich durch Vervielfachung des gegebenen Wertes bestimmen. Im Unterricht könnten im Zusammenhang mit solchen Aufgaben weitere Darstellungsformen wie zum Beispiel ein Graph, eine Zuordnungsvorschrift oder verbal formulierte Sachzusammenhänge thematisiert werden. Das Umgehen mit verschiedenen Darstellungsformen ist deshalb wichtig, da ein tiefgehendes Verständnis von proportionalen Zuordnungen auf einem breiten Spektrum von Darstellungsformen und der Fähigkeit, **flexibel zwischen diesen wechseln** zu können, beruht (*Hußmann & Laakmann*, 2011). In Tabelle 2 sind im Zusammenhang mit der ersten Teilaufgabe der Aufgabe „Proportionalität“ verschiedene Darstellungsformen abgebildet:

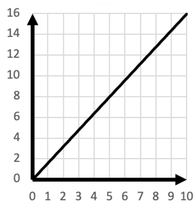
<table>
<tr><th></th><th>Tabellarisch</th><th>Graphisch</th><th>Symbolisch</th><th>Verbal-situativ</th></tr>
<tr><td>Beispiel</td><td><table><tr><td>x</td><td>5</td><td>10</td><td>2,5</td></tr><tr><td>y</td><td>8</td><td>16</td><td>4</td></tr></table></td><td>
</td><td>$y = \frac{8}{5}x$</td><td>Für die Herstellung von 5 Flaschen Apfelsaft werden 8 kg Äpfel benötigt.</td></tr>
</table>

Tabelle 2: Verschiedene Darstellungsformen am Beispiel der Teilaufgabe 1 der Aufgabe „Proportionalität“

Vor allem die graphische aber auch die symbolische Darstellung kann bei dem Vervollständigen von Wertetabellen auch als Selbstkorrektur genutzt werden. Der Wechsel zu einer verbalsituativen Darstellung kann Schülerinnen und Schülern helfen, abstrakte mathematische Zusammenhänge durch reale Situationen besser durchdringen und tiefer verstehen zu können.

Oftmals wird die Auswahl der Darstellungsform auch durch die jeweiligen Lösungsbedürfnisse bestimmt. Für Anwendungen, die schnelle oder grobe Einsichten erfordern, sind grafische Darstellungen geeignet, da sie Trends intuitiv vermitteln. Dagegen sind für präzise Berechnungen und exakte Werte tabellarische oder symbolische Darstellungen erforderlich. Die Wahl der Darstellungsform ist daher entscheidend, um den jeweiligen Lösungsbedürfnissen gerecht zu werden.

Das im Anhang dargestellte **weiterführende Material** in Form eines Dominos kann im Unterricht genutzt werden, um den Wechsel zwischen Darstellungen proportionaler Zusammenhänge zu üben. Weiterführend können von den Schülerinnen und Schülern auch eigene Dominosteine mit verschiedenen Darstellungsformen von proportionalen Zuordnungen erstellt werden. Eine Blanko-Version der Dominosteine kann unter folgendem Link heruntergeladen werden:

https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/fktn/domino_blanco.pdf

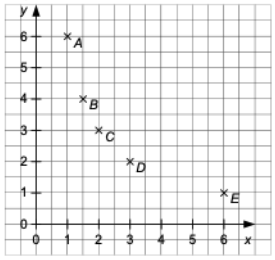
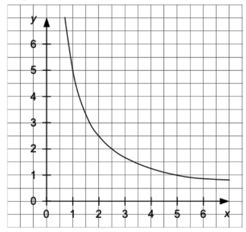
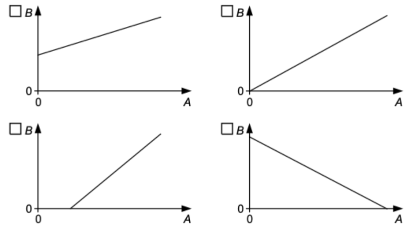
Zuordnung	Kovariation	Objekt
Eine Funktion beschreibt die Zuordnung einzelner Werte.	Eine Funktion beschreibt, wie sich die Veränderung einer unabhängigen Größe auf eine abhängige Größe auswirkt.	Eine Funktion beschreibt ein eigenständiges Objekt mit bestimmten Eigenschaften.
Aufgabe „Punkte im Koordinatensystem“ Gegeben sind die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und *E*.  **Teilaufgabe 6.1** Gib die Koordinaten der Punkte *A* und *B* an. *A*(...... | ......) *B*(...... | ......)	Aufgabe „Graphen lesen“ Gegeben ist der Graph einer antiproportionalen (indirekt proportionalen) Zuordnung.  Prüfe die folgenden Aussagen zu dieser Zuordnung. Kreuze jeweils an. Verdoppelt sich der *x*-Wert, so halbiert sich der *y*-Wert. ☐ wahr ☐ falsch Für alle Wertepaare gilt $x \cdot y = 5$. ☐ wahr ☐ falsch Je größer die *x*-Werte, desto kleiner die *y*-Werte. ☐ wahr ☐ falsch	Aufgabe „Zuordnungen“ Welches Diagramm zeigt den Graphen einer (direkt) proportionalen Zuordnung zwischen den Größen *A* und *B*? Kreuze an. 

Tabelle 3: Grundvorstellungen von Funktionen

Die Aufgabe „Zuordnungen“ erfordert die Auswahl des passenden Graphens zu einer proportionalen Zuordnung. Um diese Aufgabe lösen zu können, sollten die Schülerinnen und Schüler die grundlegenden Merkmale proportionaler Zuordnungen verstehen und den charakteristischen Verlauf einer proportionalen Zuordnung als Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems kennen. Hierbei kommt vor allem die *Objektvorstellung* als Grundvorstellung von Funktionen zum Tragen. Das bedeutet, dass die proportionale Zuordnung als „ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes darstellt“ (*Greefrath et al.*, 2016, S. 49), erfasst werden soll.

Über die allgemeinen Grundvorstellungen von Funktionen hinaus wurden in der didaktischen Handreichung Teil II im Zusammenhang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen weitere auf diese Zusammenhänge bezogene Grundvorstellungen thematisiert. Im Folgenden wird anhand einer Lösung der zweiten Teilaufgabe der Aufgabe „Proportionalität“ ein **typisches Fehlerbild** thematisiert, das auf möglicherweise nicht ausreichende Grundvorstellungen zu antiproportionalen Zuordnungen hindeutet. Die Lösung stammt aus der Pilotierung der Aufgabe.

Teilaufgabe 2:

a und *b* sind antiproportional (indirekt proportional) zueinander.

Ergänze die beiden fehlenden Zahlen in der Tabelle.

a	1	2	0,05
b	10	20	0,5

Abbildung 5: Fehlerhafte Lösung der Aufgabe „Proportionalität“

Die Fehlerlösung in Abbildung 5 lässt erkennen, dass der Lernende statt eines antiproportionalen Zusammenhangs einen proportionalen Zusammenhang zwischen den in der Tabelle dargestellten Werten herstellt. Demnach führt eine Verdopplung von *a* in dieser Lösung auch zu einer Verdopplung von *b*. Der angenommene Proportionalitätsfaktor 10 führt in der letzten Spalte dazu, dass der Wert 0,05 für *a* ergänzt wird. Die Ursache für dieses Fehlerbild kann einerseits in einem mangelnden Leseverständnis oder in einem fehlenden Verständnis von Eigenschaften antiproportionaler Zuordnungen begründet liegen. Ist letzteres die Ursache, kann die unter folgendem Link abrufbare Erläuterung helfen, die Eigenschaften antiproportionaler Zuordnungen zu wiederholden und sie den Eigenschaften proportionaler Zuordnungen gegenüberzustellen:

https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/fktn/prop/antiprop.ppt

Weiterführende Übungen zu antiproportionalen Zuordnungen finden sich in der Exceldatei unter folgendem Link:

https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/fktn/prop/antiproportional1.xls

In diesem Material werden sowohl graphische, verbal-situative als auch tabellarische Darstellungsformen genutzt. Die unterschiedlichen Darstellungsformen können insbesondere auch bei schwächeren Schülerinnen und Schülern dazu beitragen, zentrale Aspekte eines Begriffes zu verstehen (*Hußmann & Laakmann*, 2011).

5. Die Leitidee Raum und Form

Für die Leitidee Raum und Form werden die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss folgendermaßen konkretisiert *(KMK*, 2004, S. 11):

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt,
- operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern,
- stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar,
- stellen Körper (z.B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,
- analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes,
- beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen,
- wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen an, insbesondere den Satz des Pythagoras und den Satz des Thales,
- zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware,
- untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben und formulieren diesbezüglich Aussagen,
- setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein.

In den Bildungsstandards Mathematik für den Hauptschulabschluss finden sich viele der genannten Aspekte wieder, es wird jedoch weniger der Fokus auf Problemlöse- und Beweisprozesse gelegt (*KMK*, 2004). Ebenso finden fachliche Analysen und exploratives Arbeiten dort keine direkte Erwähnung, obgleich sich empirisch zeigt, dass konstruktivistische, explorative Ansätze besonders für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler wirksam sind (u.a. *Reiss et al.*, 2006). Besonders hervorgehoben werden in beiden Versionen der Bildungsstandards das Analysieren und Anfertigen verschiedener Darstellungen von Körpern. In diesem Rahmen sollen die Schülerinnen und Schüler auch gedanklich mit Körpern operieren (z.B. gedankliche Rotationen von Körpern durchführen) und Körper aus verschiedenen Darstellungen (z.B. Schrägbild oder Körpernetz) erkennen können.

In den folgenden zwei Unterkapiteln wird zunächst das Schwerpunktthema der diesjährigen KERMIT-8 Erhebung Räumliche Geometrie näher betrachtet. Schülerinnen und Schüler werden in ihrem alltäglichen Leben ständig mit der räumlichen Geometrie konfrontiert, da sich unser Leben in einem dreidimensionalen Raum abspielt. Um sich in der Umwelt zu orientieren oder sich selbst in der Umwelt wahrzunehmen, ist ein räumliches Vorstellungsvermögen notwendig. Die Förderung eines solchen räumlichen

Vorstellungsvermögens ist ein Ziel des Geometrieunterrichts in der Schule (*Weigand*, 2018). In den folgenden Unterkapiteln wird zunächst dargestellt, wie Inhalte der räumlichen Geometrie im Unterricht thematisiert werden können. Im Anschluss daran werden Beispiele zu KERMIT-8 Aufgaben aus dem Bereich der räumlichen Geometrie vorgestellt. Die Aufgaben werden auf die benötigten inhaltlichen Fähigkeiten aus dem Bereich Räumliche Geometrie untersucht sowie die erforderlichen prozessbezogenen Kompetenzen beschrieben.

5.1. Schwerpunktthema: *Räumliche Geometrie*

Der Mathematikunterricht soll drei Grunderfahrungen (*Winter*, 1995) ermöglichen (vgl. Kapitel 2) und somit zur Bildung der Schülerinnen und Schüler beitragen (*KMK*, 2004). Zur Ermöglichung dieser Grunderfahrungen kann auch die Geometrie beitragen: So soll beispielsweise im Rahmen der ersten Grunderfahrungen die Umwelt mithilfe der Geometrie erschlossen werden (*Weigand*, 2018). Das heißt: Die uns umgebende Welt soll unter einer geometrischen Perspektive gesehen, geometrische Figuren und Körper in unserer Umwelt (z.B. in Verpackungen) erkannt und bezüglich ihrer Funktion und Bedeutung analysiert werden. Das Konstruieren mit Zirkel und Lineal bietet Einblicke in die deduktive Welt der Mathematik und das Erfahren typischer mathematischer Arbeitsweisen, womit die zweite Grunderfahrung ermöglicht wird. Im Rahmen der dritten Grunderfahrung soll das Problemlösen mit Geometrie erlernt werden, welches als eine der Grunderfahrungen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts zählt. Für das Problemlösen stellt die Geometrie ein geeignetes Übungsfeld dar, da viele geometrische Probleme in Modellen oder Zeichnungen veranschaulicht werden können und Handlungen (beispielsweise mit Zirkel und Lineal) verständlich nachzuvollziehen sind (*Weigand*, 2018). Da das alltägliche Leben im dreidimensionalen Raum abläuft, kommt der Thematisierung der räumlichen Geometrie im Schulunterricht eine besondere Bedeutung zu (*Weigand*, 2018). Sollen raumgeometrische Objekte auf einem Zeichenblatt oder einem Computerbildschirm dargestellt werden, so ist die Projektion der dreidimensionalen Objekte in die Ebene erforderlich (*Weigand*, 2018). Um auch im Unterricht mit raumgeometrischen Objekten zu arbeiten, kann dynamische Geometriesoftware für die Raumgeometrie verwendet werden. Ein Beispiel dafür ist der 3D-Modus in GeoGebra. Eine weitere Möglichkeit, Modelle von raumgeometrischen Objekten im Mathematikunterricht zu erzeugen, ist die 3D-Druck-Technologie. Mithilfe des 3D-Drucks können individuelle Anschauungsobjekte durch Lehrkräfte oder auch selbstständig durch Schülerinnen und Schüler erzeugt werden. Auf diese Weise kann auch das forschend-entdeckende Lernen von Schülerinnen und Schülern gefördert werden (*Witzke & Hoffart*, 2018). Zudem kann die Bedeutung und Erstellung von Modellen von realweltlichen Objekten thematisiert werden. An dieser Stelle lässt sich somit eine Parallele zwischen der Arbeit mit der 3D-Druck Technologie bzw. dem Entwicklungsprozess von Modellen für den 3D-Druck und dem Mathematischen Modellieren (K3) ziehen. Modelle sind auch bei der Thematisierung von Körpern im Mathematikunterricht von großer Bedeutung. Modelle dienen, beispielsweise bei Berechnungen, als Anschauungshilfen und können das räumliche Vorstellungsvermögen unterstützen. Es gibt verschiedene Modelle raumgeometrischer Objekte, denen jeweils unterschiedliche didaktische Bedeutungen zugeschrieben werden (*Roth & Wittmann*, 2018). Zum Einstieg in das Thema Körper bieten sich sogenannte Kompaktmodelle bzw. Vollmodelle an. Diese stellen Prototypen der Körper dar und bieten sich zum Beschreiben der Eigenschaften eines Körpers an (zum Beispiel, um die Anzahl der Ecken eines Quaders zu beschreiben). So können Alltagsgegenstände im Schulunterricht als Vollmodelle dienen. Um einen Einblick in das Innere eines Körpers zu erhalten oder die Kanten eines Körpers stärker zu fokussieren, bietet sich die Arbeit mit Kantenmodellen an. Bei diesen fehlen die Flächen des Körpers. Ein Kantenmodell kann aus Holzstäbchen selbst angefertigt werden. Zudem bietet die Arbeit mit Flächenmodellen die Möglichkeit, Körpernetze darzustellen. Diese können ebenfalls eigenständig, beispielsweise aus Papier, angefertigt werden. Des Weiteren eignen sich Körpernetze, um den Zusammenhang zwischen räumlicher und ebener Geometrie herzustellen, indem die Oberfläche der Körper in die Ebene abgewickelt wird. Da Gegenstände der realen Umwelt zunächst als Körper erfasst werden und man erst in einem zweiten Schritt, zum Beispiel durch Betrachtung der Oberfläche eines Körpers oder von bildlichen Darstellungen, zur Zeichenebene gelangt ist, eine parallele Betrachtung von ebenen Figuren und Körpern sinnvoll (*Roth & Wittmann*, 2018). Eine Gegenüberstellung der verschiedenen Modelle raumgeometrischer Objekte ist in Tabelle 4 anhand eines Würfels beispielhaft dargestellt.

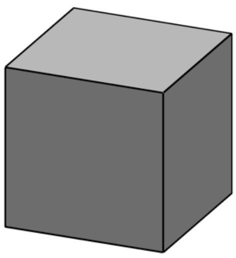
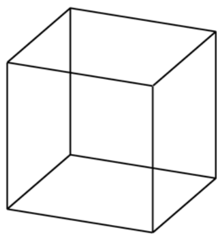
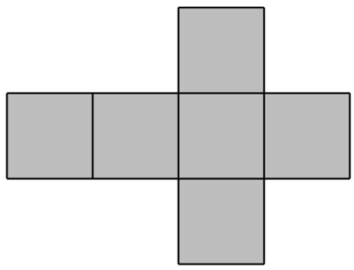
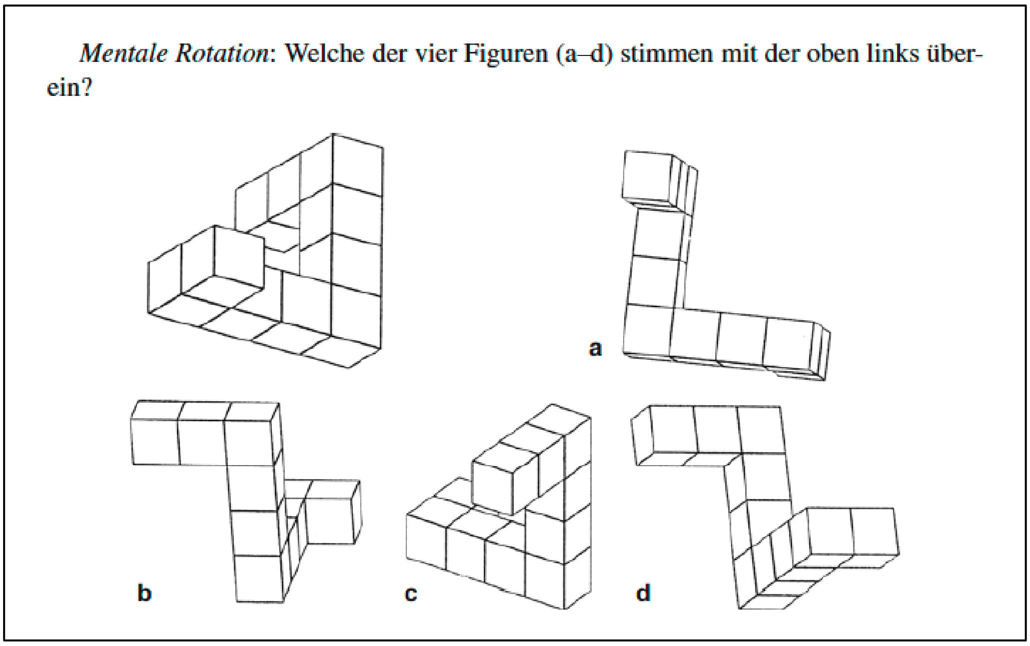
Vollmodell	Kantenmodell	Flächenmodell
		

Tabelle 4: Verschiedene Modelle eines Würfels

Sind die Schülerinnen und Schüler bereits ein wenig mit Körpern vertraut, können Körpernetze oder in der Ebene dargestellte Vollmodelle auch zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens oder im Rahmen der Kopfgeometrie eingesetzt werden (*Roth & Wittmann*, 2018), um somit das gedankliche Operieren mit Körpern zu fördern. Unter dem räumlichen Vorstellungsvermögen wird die Fähigkeit verstanden, sich Objekte vorzustellen und in Gedanken damit zu operieren (z.B. Zusammenfalten eines Würfelnetzes oder Drehen eines Würfels). Voraussetzung dafür ist, dass Objekte zuvor visuell wahrgenommen und Vorstellungsbilder aufgebaut werden. Schülerinnen und Schüler können nur dann in

Gedanken mit Objekten operieren, wenn sie diese bereits visuell wahrgenommen und im visuellen Gedächtnis gespeichert haben. Indem sichtbare Objekte wahrgenommen werden, also beispielsweise (wieder) erkannt und Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Objekte erfasst werden, können solche Vorstellungsbilder aufgebaut werden. Die Fähigkeit des räumlichen Vorstellungsvermögens besteht aus den fünf Komponenten: Räumliche Wahrnehmung, Veranschaulichung, Mentale Rotation, Räumliche Beziehungen, Räumliche Orientierung. Diese Komponenten beschreiben verschiedene Fähigkeiten des räumlichen Vorstellungsvermögens, zum Beispiel die Fähigkeit, sich gedanklich Aktivitäten wie das Falten oder Schneiden von räumlichen Objekten oder Objektteilen vorzustellen (Veranschaulichung) oder die Fähigkeit, sich Rotationen von Objekten vorzustellen (Mentale Rotation) (*Maier*, 1999). Ein Beispiel für eine Diagnoseaufgabe zur Komponente Mentale



Rotation ist in Abbildung 6 zu sehen. Eine ausführliche Beschreibung der Komponenten sowie weitere Diagnoseaufgaben werden in Maier, 1999 und Roth und Wittmann, 2018 beschrieben.

Abbildung 6: Diagnoseaufgabe zur Komponente *Mentale Rotation* (Roth & Wittmann, 2018)

Um das räumliche Vorstellungsvermögen zu fördern, sollte vor allem die Vorstellung von Bewegungen, wie zum Beispiel Rotationen, geschult werden. Dies kann unter anderem mit der Kopfgeometrie unterstützt werden (*Roth & Wittmann*, 2018). Mithilfe der Kopfgeometrie werden geometrische Probleme ohne die Nutzung von Hilfsmitteln im Kopf gelöst. Dadurch kann neben der Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens auch Sicherheit im Gebrauch der Fachsprache gewonnen werden, Grundvorstellungen zu geometrischen Begriffen können aufgebaut und angewendet sowie geometrische Grundbegriffe gesichert und vertieft werden (*Roth & Wittmann*, 2018). Ein Beispiel für eine Aufgabe zur Kopfgeometrie ist in Abbildung 7 zu sehen.

- Ein Würfel steht auf einer Ebene, die Vorderfläche zeigt zu dir.
- Zeichne die beiden Diagonalen der rechten Fläche. Ihr Schnittpunkt heißt M.
- Der Würfeleckpunkt H liegt links, hinten, oben.
- Zeichne eine Gerade g durch H und M, sie schneidet die Ebene, auf der der Würfel steht, im Punkt S.
- Wie weit ist S vom Würfel entfernt?
- Kannst du die Lage von S genauer beschreiben?

Abbildung 7: Beispielaufgabe zur Kopfgeometrie (Roth & Wittmann, 2018, S. 144)

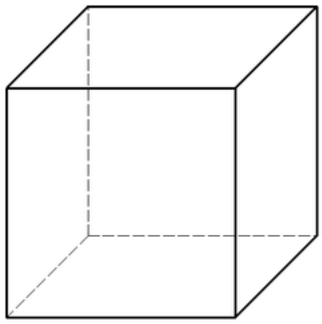
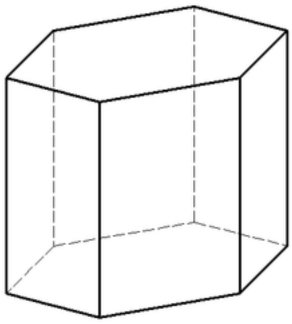
Für die Arbeit mit Aufgaben zur Kopfgeometrie werden drei Phasen erläutert (*Senftleben*, 1996; *Roth und Wittmann*, 2018): In der ersten Phase verbalisiert die Lehrkraft eine Aufgabenstellung. In der zweiten Phase wird im Kopf mit Objekten operiert. In der dritten Phase werden Ergebnisse präsentiert und diskutiert. Zur Unterstützung ist es möglich, zunächst Hilfsmittel einzusetzen (*Senftleben*, 1996). So kann die Lehrkraft in der ersten Phase ein Bild oder ein konkretes Modell eines geometrischen Objekts zur Verdeutlichung der Aufgabenstellung zu Hilfe nehmen. In der dritten Phase können die Schülerinnen und Schüler bei der Präsentation der Ergebnisse ihr Ergebnis aufzeichnen oder zum Beispiel aus Papier oder Knete nachbauen.

5.2. *Räumliche Geometrie* in KERMIT-8

Im folgenden Abschnitt werden drei Beispielaufgaben zur räumlichen Geometrie dargestellt. Zudem wird erläutert, auf welche Allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards diese jeweils abzielen und wie diese Aufgaben vertiefend im Unterricht genutzt werden können. Die erste Aufgabe „Ecken und Kanten“ fokussiert das Analysieren von geometrischen Objekten des Raumes. In der zweiten Aufgabe „Würfelnetz“ steht das Erkennen von Körpern aus entsprechenden Darstellungen (hier aus dem Netz eines Körpers) im Vordergrund. Die dritte Aufgabe „Lage der Würfel“ thematisiert das gedankliche Operieren mit Körpern. Im Folgenden ist die Aufgabe „Ecken und Kanten“ dargestellt.

Beispielaufgabe 3: „Ecken und Kanten“

Ergänze die Tabelle.

	Gesamtzahl der Ecken	Gesamtzahl der Kanten
Würfel 	8	
Prisma mit sechseckiger Grundfläche 		18

Die Aufgabe „Ecken und Kanten“ spricht die Kompetenz Mathematische Darstellungen verwenden (K4) an: Die Schülerinnen und Schüler bestimmen mithilfe von perspektivischen Zeichnungen der Körper Würfel und Prisma die Anzahl der Ecken bzw. Kanten dieser Körper. Fehler bei der Bearbeitung der Aufgabe können sich dadurch ergeben, wenn Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit den Begriffen Ecken und Kanten haben. Um die Begriffe einführend zu thematisieren, können diese anhand von haptischem Material veranschaulicht werden.

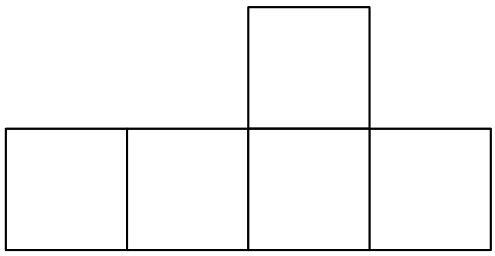
Die Aufgabe kann im Unterricht dazu genutzt werden, um mit Schülerinnen und Schülern perspektivische Darstellungen und verschiedene Arten von Projektionen zu thematisieren. Lernende können an perspektivische Darstellungen herangeführt werden, indem sie zunächst vorgefertigte Zeichnungen vervollständigen. Zum tieferen Verständnis kann es hilfreich sein, wenn die eigentlich nicht sichtbaren Kanten, welche in der Aufgabe „Ecken und Kanten“ gestrichelt dargestellt sind, zunächst gar nicht vorzugeben, sondern diese von den Schülerinnen und Schülern selbst einzeichnen zu lassen. Zudem kann die Aufgabe im Unterricht dahingehend erweitert werden, dass die Tabelle für weitere Körper fortgeführt wird. Auch das Zeichnen eines bestimmten Körpers anhand einer vorgegebenen Anzahl von

Ecken und/ oder Kanten ist denkbar. So können Schülerinnen und Schüler beispielsweise dazu aufgefordert werden, ein Prisma mit 6 Ecken und 9 Kanten zu zeichnen, was zusätzlich Problemlösefähigkeiten erfordert. Zudem können solche perspektivischen Darstellungen im Unterricht genutzt werden, um mit den Schülerinnen und Schülern Kantenmodelle nachzubauen (siehe auch Kapitel 6.1). Dazu können beispielsweise Strohhalme, Holzstäbchen oder Ähnliches als Kanten dienen, die mit Pfeifenputzern oder Knete verbunden werden. Weiterführend können die konstruierten Modelle dann aus verschiedenen Perspektiven (zum Beispiel aus der Vorderansicht, der Draufsicht oder als Schrägbild) auf ein Zeichenblatt übertragen werden und so verschiedene perspektivische Darstellungen thematisiert werden.

Die Beispielaufgabe 4 „Würfelnetz“ thematisiert Körpernetze, indem die Schülerinnen und Schüler zum Vervollständigen eines Würfelnetzes aufgefordert werden.

Beispielaufgabe 4: „Würfelnetz“

Paul hat begonnen, ein Würfelnetz zu zeichnen. Er muss noch ein einzelnes Quadrat an das Netz zeichnen, um ein intaktes Würfelnetz zu erhalten.



Kreuze alle Kanten an, an denen Paul das Quadrat zeichnen könnte, um ein Würfelnetz zu erhalten.

Zur Lösung der Aufgabe „Würfelnetz“ ist die Kompetenz Mathematische Darstellungen verwenden (K4) erforderlich, da Schülerinnen und Schüler beurteilen, wie das Netz zu einem Würfelnetz vervollständigt werden kann. Zudem wird die Kompetenz Probleme mathematisch lösen (K2) benötigt, da es sich um ein Problem handelt, welches es strategisch zu lösen gilt, beispielsweise mithilfe eines zeichnerischen Ansatzes oder einer gedanklichen Operation. Die Schülerinnen und Schüler können zum Finden der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten Heurismen (z.B. systematisches Probieren, Skizzen erstellen) verwenden.

Eine Herausforderung bei dieser Aufgabe ist der erforderliche gedankliche Wechsel zwischen einer Darstellung der Oberfläche eines Körpers und seiner räumlichen Gestalt. Es ist anzunehmen, dass den Lernenden dieser Wechsel leichter zugänglich gemacht werden kann, indem sie ihn auch handelnd erfahren. Dazu kann beispielsweise mithilfe dynamischer Geometriesoftware der Übergang vom Netz eines Körpers zu seiner räumlichen Gestalt visualisiert werden. Mithilfe von folgendem GeoGebra-Applet können verschiedene Netze eines Würfels betrachtet und zu einem Würfel zusammengeklappt werden. Zudem können der Würfel und das Würfelnetz gedreht und rotiert und so von verschiedenen Seiten betrachtet werden: https://www.geogebra.org/m/teCkgD2S

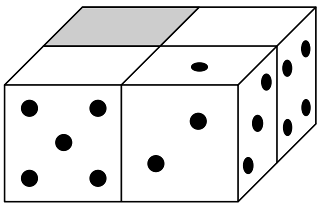
Solche Körpernetze können im 3D Grafikrechner von GeoGebra (mit der Funktion „Netz“) auch zu anderen Körpern selbst erstellt werden. Durch die Möglichkeit, in GeoGebra verschiedene geometrische Köper zu erstellen und diese zu drehen und rotieren, kann das räumliche Vorstellungsvermögen unterstützt werden.

Ebenso können Schülerinnen und Schüler auch eigenständig entsprechende Aufgaben formulieren, indem sie verschiedene Körpernetze zeichnen und sich diese gegenseitig vorlegen. Die Lernenden erhalten durch dieses Vorgehen nicht nur eine Lösungsstrategie für dieses Problem, sondern können das Verfahren des Bastelns eines Modells, entsprechend angeleitet und unterrichtlich gesichert, zur Überprüfung von Annahmen oder zur Lösung von Problemen auch anderweitig anwenden.

Die nächste Aufgabe fokussiert das Analysieren geometrischer Objekte des Raumes sowie das gedankliche Operieren mit Würfeln. Im Folgenden ist die Beispielaufgabe 5 „Lage der Würfel“ dargestellt.

Beispielaufgabe 5: „Lage der Würfel“

Die Abbildung zeigt vier Spielwürfel, die alle in der gleichen Weise beschriftet sind. Die Augenzahlen gegenüberliegender Seiten ergänzen sich immer zu 7. Daher liegen jeweils die Augenzahlen 1 und 6 einander räumlich gegenüber, die Augenzahlen 2 und 5 sowie 3 und 4 ebenfalls.



Diejenigen Seitenflächen dieser Spielwürfel, die sich vollständig berühren, haben immer die gleiche Augenzahl. Einige Augenzahlen fehlen in der Abbildung.

Gib an, welche Augenzahl auf der grauen Seitenfläche fehlt.

Auf der grauen Seitenfläche fehlt die Augenzahl ....

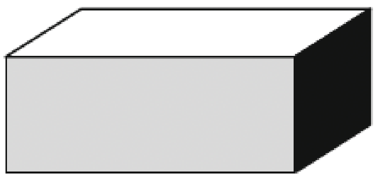
Schreibe die einzelnen Schritte auf, wie du zu deiner Lösung gekommen bist.

Für die Aufgabe „Lage der Würfel“ ist die Kompetenz Probleme mathematisch lösen (K2) erforderlich, da das dargestellte Problem ein strategiegestütztes Vorgehen erfordert. Die zu berücksichtigenden Zusammenhänge zwischen der dargestellten räumlichen Anordnung der vier Würfel und den gegebenen Bedingungen für die Augenzahlen sind dabei die entscheidende Hürde. Zudem erfordert die Aufgabe die Kompetenz Mathematische Darstellungen verwenden (K4), da mit der Darstellung mehrerer Würfel gearbeitet wird. Zur Lösung der Aufgabe können Heurismen verwendet werden. So kann die für die graue Seite passende Augenzahl beispielsweise durch Vorwärtsarbeiten gefunden werden, indem sich die Schülerinnen und Schüler Schritt für Schritt die fehlenden Augenzahlen auf den Würfelseiten überlegen und sich so dem Ziel, der Augenzahl auf der grauen Würfelseite, nähern. Dabei können sich die Schülerinnen und Schüler folgende Fragen stellen (*Kuzle & Bruder*, 2016): „Was ist gegeben? Was kann ich aus dem folgern, was ich schon weiß?“ Auch durch systematisches Probieren kann die gesuchte Augenzahl gefunden werden, indem die sichtbaren weißen Würfelseiten vervollständigt, mögliche Augenzahlen der grauen Seitenfläche ausprobiert und die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen geprüft werden. Als weitere Unterstützung können Lernenden Spielwürfel zur Verfügung gestellt werden, sodass diese wie in der Aufgabe dargestellt angeordnet werden können und die fehlenden Augenzahlen erkundet werden können. So können die Schülerinnen und Schüler beispielsweise auch entdecken, dass die gesuchte Augenzahl sowohl eine eins als auch eine sechs sein kann.

Wird die Aufgabe ohne haptisches Material bearbeitet, so erfordert die Aufgabe räumliches Vorstellungsvermögen, da es notwendig ist, sich die Rückseiten der Würfel beziehungsweise die Augenzahlen auf den sich berührenden Seiten vorzustellen. Wie bereits in Kapitel 6.1 beschrieben, kann das räumliche Vorstellungsvermögen mithilfe der Kopfgeometrie unterstützt werden. Eine weitere Beispielaufgabe zur Kopfgeometrie, welche ebenfalls die Seitenflächen eines Quaders thematisiert, zeigt Abbildung 8.

Beispiel 6.28: Kopfgeometrie: Quader kippen

Der abgebildete Quader soll gekippt werden, erst nach rechts, dann nach hinten und schließlich noch zweimal nach rechts:



Der Quader ist in der Anfangslage vorn grau, rechts schwarz, hinten grün, links rot, oben weiß und unten gelb. Kippt nun *in Gedanken* den Quader wie oben beschrieben.

Ihr dürft den Quader ansehen, aber nicht in die Hand nehmen. Notiert für jede Zwischenlage und die Endlage die Farben der Flächen vorne, rechts hinten, links, oben und

Abbildung 8: Beispielaufgabe zur Kopfgeometrie (Roth & Wittmann, 2018, S. 145)

Zusammenfassend gibt es beim Arbeiten mit der räumlichen Geometrie also eine Vielzahl an Möglichkeiten, wie mit dreidimensionalen Objekten gearbeitet werden kann. Um das räumliche Vorstellungsvermögen zu schulen und das gedankliche Operieren mit Körpern zu ermöglichen, ist es hilfreich, mit Modellen, Netzen, Schrägbildern oder Ähnlichem und haptischem Material zu arbeiten. In diesem Rahmen können auch Zusammenhänge zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie thematisiert und der Wechsel zwischen diesen erleichtert werden.

5.3. Abschließende Bemerkungen

Die diesjährigen didaktischen Handreichungen beinhalten erneut zwei Themenschwerpunkte aus zwei Leitideen, die als Ergänzungsmodule für die KERMIT-8 Testung zur Auswahl stehen. Im Bereich der Leitidee *Raum und Form* ist dies der Schwerpunkt *Räumliche Geometrie*, im Bereich der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* der Schwerpunkt *Proportionale und antiproportionale Zuordnungen*. Aus beiden Themen wurden zentrale Inhalte betrachtet, welche durch die Bildungsstandards vorgegeben werden. Für weitere Anregungen für die Unterrichtspraxis sei auf die Kommentare zu den einzelnen Aufgaben im Anhang der didaktischen Handreichungen verwiesen. Zudem wurde aufgezeigt, welche Aufgabenmerkmale mit welchen allgemeinen mathematischen Kompetenzen einhergehen. Für weitere Beispiele und Anregungen stellt die in den vorangegangenen Kapiteln genannte Literatur eine gute Ausgangslage dar.

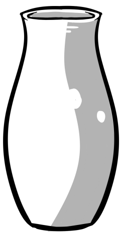
6. Aufgaben zur Leitidee Raum und Form: Schwerpunktthema *Räumliche Geometrie*

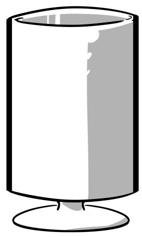
6.1. Geometrische Objekte in der Umwelt erkennen

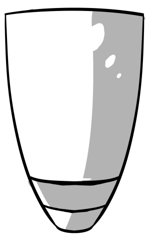
Aufgabe: Lampe

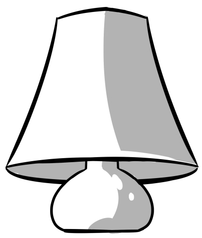
Welche dieser Lampen hat einen zylinderförmigen Lampenschirm?

Kreuze an.

☐ 

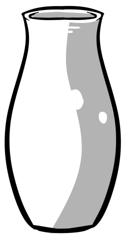
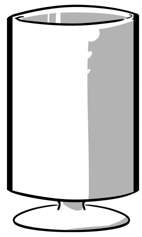
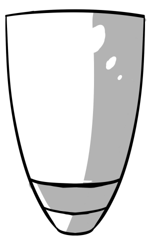
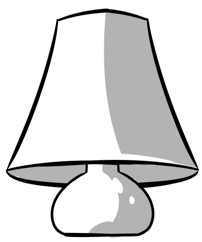
☐ 

☐ 

☐ 

MA4632

Auswertung

RICHTIG	☐  ☒  ☐  ☐ 

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1a
Bildungsstandards	3.01h

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Lampe“ ist der Leitidee *Raum und Form* (L3) zuzuordnen, da geometrische Objekte in der Umwelt erkannt werden, indem ein Lampenschirm als zylinderförmig identifiziert wird.

In dieser Aufgabe wird ein Objekt aus der Umwelt (ein Lampenschirm) einem mathematischen Objekt (einem Zylinder) zugeordnet. Dabei findet ein Übersetzungsprozess zwischen der realen Welt und der Mathematik statt, sodass die Aufgabe die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3) erfordert.

Die Aufgabe ist im *Anforderungsbereich I* einzuordnen, da es sich um ein einfaches Objekt aus der Umwelt handelt, dass einem mathematischen Objekt zugeordnet wird.

Aufgabe: Verschiedene Körper

Die Gegenstände auf den Bildern lassen sich annähernd durch geometrische Körper beschreiben.

Verbinde jedes Bild jeweils mit dem passenden Begriff.

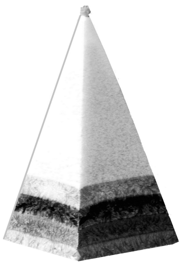
Hinweis: Zwei Angaben auf der rechten Seite bleiben übrig.

MA4635

MA4636

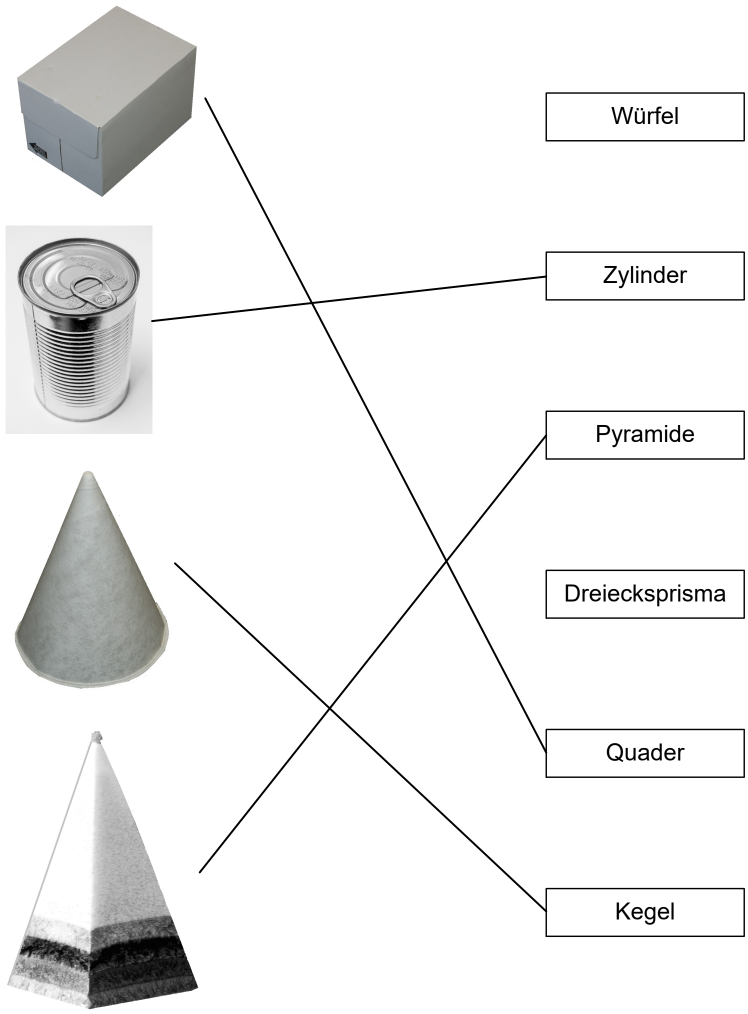
MA4637

MA4638



Würfel
Zylinder
Pyramide
Dreiecksprisma
Quader
Kegel

Auswertung

RICHTIG	

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch modellieren (K3)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	3.01h

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Verschiedene Körper" gehört zur Leitidee *Raum und Form* (L3), weil verschiedenen Objekten aus dem alltäglichen Leben ein geometrischer Körper zugeordnet werden soll.

In der Aufgabe werden Objekten aus der Erfahrungswelt mathematische Körper zugeordnet, was einem Übersetzungsprozess zwischen der realen Welt und der Mathematik entspricht. Somit erfordert die Aufgabe die Kompetenz *Mathematisch modellieren* (K3).

Da es sich um einfache Objekte aus der Umwelt und bekannte geometrische Körper handelt, ist die Aufgabe dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen.

Anregungen für den Unterricht

In den Aufgaben „Lampe“ und „Verschiedene Körper“ geht es darum, **in realweltlichen Objekten geometrische Körper zu erkennen**. Das Lernen mathematischer Begriffe erfolgt auf mehreren Stufen (*Roth*, 2012; *Vollrath*, 1984). Ein Begriff wird zunächst als Phänomen aufgefasst, wodurch auf der ersten Stufe ein intuitives Begriffsverständnis erreicht wird (*Vollrath*, 1984). Dieses intuitive Begriffsverständnis baut auf Alltagserfahrungen der Lernenden mit geometrischen Objekten auf und beinhaltet, dass Schülerinnen und Schüler Beispiele für einen Begriff angeben können (*Roth*, 2012). Um im Unterricht das Erkennen geometrischer Objekte in der Umwelt näher zu thematisieren, eignen sich Bilder von Alltagsobjekten. Dabei können auch Objekte verwendet werden, die ein stärkeres Abstrahieren von Detailmerkmalen erfordern. So kann beispielsweise im Berliner Fernsehturm eine Kugel wahrgenommen werden, wenn der untere Teil, die Spitze des Turms und die flächenhafte Zusammensetzung der Kugeloberfläche, vernachlässigt werden. Diese Objekte können dann den entsprechenden geometrischen Körpern zugeordnet und deren Eigenschaften beschrieben werden. Da mathematische Objekte abstrakter Natur sind, sind solche Vereinfachungen und Generalisierungen notwendig, um in realen Objekten mathematische Objekte zu erkennen und mit ihnen zu operieren. Dieses Phänomen sollte im Unterricht thematisiert werden. Durch das Herausarbeiten von Generalisierungen nehmen Lernende zudem die Eigenschaften mathematischer Objekte stärker in den Fokus. Anhand der Objekte in der Aufgabe kann darüber hinaus begründet werden, warum sich in den jeweiligen Objekten die entsprechenden geometrischen Körper wiederfinden lassen. Auf diese Weise kann die nächste Stufe, das inhaltliche Begriffsverständnis, erreicht werden. Beispiele für Bilder von Alltagsobjekten, die zum Einstieg in das Erkennen geometrischer Körper genutzt werden können, sowie **weiterführendes Material** können unter folgendem Link abgerufen werden:

https://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2012/roth_geometrische_koerper_erkennen_und_sortieren_als_grundlage_der_begriffsbildung.pdf

Um das Erkennen geometrischer Objekte durch Vertiefung der Begriffe bzw. Eigenschaften von geometrischen Körpern zu unterstützen, kann der digitale Lernpfad „Rund um die Pyramide“ zu verschiedenen geometrischen Körpern genutzt werden. Der Lernpfad thematisiert die Eigenschaften von Zylinder, Pyramide und Kegel. Dabei wird auch auf das Volumen und den Oberflächeninhalt der Körper eingegangen, was sich eher in die Leitidee *Messen* (L2) einordnen lässt. Darüber hinaus enthalten die Lernpfadkapitel zu jedem der geometrischen Körper auch Aufgaben und Erläuterungen zu ihren Eigenschaften sowie zum Erkennen der Körper im Alltag. Auch die Netze der Körper werden in diesem Lernpfad thematisiert. Unter folgendem Link kann der **Lernpfad** abgerufen werden:

https://unterrichten.zum.de/wiki/Zylinder_Pyramide_Kegel/Rund_um_die_Pyramide

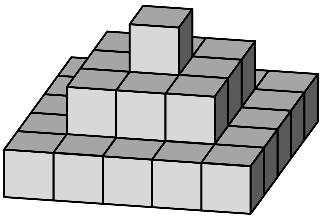
Auch auf der Lernplattform *Serlo Mathematik* findet man Erläuterungen und Aufgabensammlungen zu geometrischen Körpern. Im Kapitel „Zylinder“ sind beispielsweise neben einer kurzen Zusammenfassung der Eigenschaften eines Zylinders auch Beispiele für alltägliche Gegenstände mit einer Grundform als Zylinder aufgeführt. Auf der Seite können Artikel und **Aufgaben zu den Körpern** Quader, Würfel, Prisma, Pyramide, Tetraeder, Kegel und Kugel abgerufen werden:

https://de.serlo.org/mathe/1300/raeumliche-figuren

6.2. *Gedankliches Operieren mit Körpern*

Aufgabe: Stufenpyramide

Michaela hat aus Holzwürfeln eine Stufenpyramide gebaut, die von allen vier Seiten gleich aussieht.



Teilaufgabe 1.1

Gib an, aus wie vielen Holzwürfeln die Stufenpyramide besteht.

MA4633
....

Auswertung

RICHTIG	35

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	3.02

Teilaufgabe 1.2

Wie viele Würfelseiten sieht man, wenn man genau von oben auf die Stufenpyramide sieht?

Man sieht MA4647 .... Würfelseiten.

Auswertung

RICHTIG	25

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	3.02

Teilaufgabe 1.3

Wie viele Würfelseiten sieht man, wenn man genau von der rechten Seite auf die Stufenpyramide sieht?

MA4634

Man sieht .... Würfelseiten.

Auswertung

RICHTIG	9

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	3.02

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Stufenpyramide" wird der Leitidee *Raum und Form* (L3) zugeordnet, da gedanklich mit der Würfelpyramide operiert wird, um die sichtbaren Würfelseiten aus verschiedenen Perspektiven zu bestimmen.

In allen Teilaufgaben wird mit der Darstellung von Würfeln gearbeitet, weswegen die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) erforderlich ist.

Da es sich bei der Darstellung um eine aus Würfeln gebaute Pyramide, also um eine Darstellung vertrauter Objekte handelt, bei welcher lediglich die Anzahl an sichtbaren Würfelseiten gezählt werden muss, befinden sich alle drei Teilaufgaben im *Anforderungsbereich I*.

Aufgabe: Quaderzerlegung

Der Quader in Abbildung 1 ist vollständig aus gleichen, kleinen Würfeln gebaut.

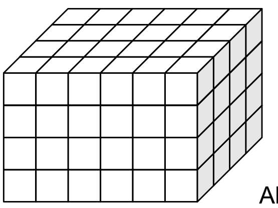


Abbildung 1

Teilaufgabe 1.1

Aus wie vielen gleichen, kleinen Würfeln besteht der Quader?

Kreuze an.

☐ 24 ☐ 51 ☐ 64 ☐ 96

MA2559

Auswertung

RICHTIG	☐ 24	☐ 51	☐ 64	☒ 96

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	3.02

Teilaufgabe 1.2

Der Quader soll in mehrere gleich große Würfel zerlegt werden (siehe Abbildung 2).

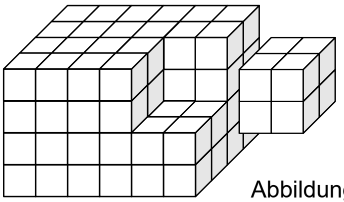


Abbildung 2

In wie viele solcher gleich großen Würfel kann der Quader zerlegt werden?

MA2560 .... Würfel

Auswertung

RICHTIG	12

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	3.02

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Quaderzerlegung“ ist der Leitidee *Raum und Form* (L3) zuzuordnen, weil mit geometrischen Objekten, Würfeln und Quadern, gedanklich operiert wird, um die Anzahl an Würfeln im Quader zu bestimmen.

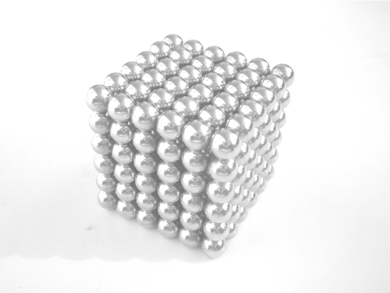
Die erste Teilaufgabe erfordert die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), da die Anzahl der Würfel, aus denen der Quader besteht, in der Darstellung bestimmt werden muss. Auch in der zweiten Teilaufgabe ist es erforderlich, die Anzahl der zusammengesetzten Würfel, in die der Quader zerlegt werden soll, anhand der Darstellung zu bestimmen. Daher erfordert diese Teilaufgabe ebenfalls die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4). Da es sich in der zweiten Teilaufgabe um ein Problem handelt, welches mit verschiedenen Strategien (z. B.

Abzählen der großen Würfel) gelöst werden kann, wird auch die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) gefordert.

Da es sich in beiden Teilaufgaben um eine vertraute Darstellung von Würfeln bzw. Quadern und um ein einfaches Problem handelt, werden beide Teilaufgaben dem *Anforderungsbereich I* zugeordnet.

Aufgabe: Magnetkugelwürfel

Der abgebildete Würfel ist innen und außen vollständig aus kleinen Magnetkugeln aufgebaut.



Aus wie vielen kleinen Magnetkugeln besteht die „Außenfläche“ dieses Würfels?

Kreuze an.

☐ 136 ☐ 150 ☐ 152 ☐ 168 ☐ 216

MA2336

Auswertung

RICHTIG	☐ 136 ☐ 150 ☒ 152 ☐ 168 ☐ 216

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5
Bildungsstandards	3.02

Aufgabenbezogener Kommentar

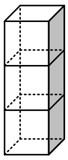
In der Aufgabe „Magnetkugelwürfel“ wird die Außenfläche eines Würfels aus Kugeln betrachtet und die Anzahl der Kugeln auf der Außenfläche bestimmt. Dabei wird gedanklich mit einem Würfel operiert, weswegen die Aufgabe der Leitidee *Raum und Form* (L3) zuzuordnen ist.

Die Aufgabe erfordert die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), da die Anzahl der Magnetkugeln in der Außenfläche des Würfels anhand der Darstellung bestimmt wird. Um die Anzahl der Magnetkugeln in der Außenfläche des Würfels zu ermitteln, ist eine geeignete Strategie notwendig, da die Kugeln an den Kanten von mehreren Seiten sichtbar sind und nicht doppelt gezählt werden dürfen. Somit wird ebenfalls die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) angesprochen.

Bei der Aufgabe handelt es sich um ein Problem, dessen Lösung die Anwendung von heuristischen Strategien erfordert. Die Aufgabe ist dem *Anforderungsbereich II* zuzuordnen, da es sich um eine ungewohnte Darstellung des Würfels und somit um ein unvertrautes Vorgehen zur Bestimmung der Anzahl an Kugeln in der Außenfläche handelt.

Aufgabe: Würfel

Gegeben ist eine Säule, die aus drei aufeinandergelegten gleich großen Würfeln besteht.



Wie viele solcher Säulen benötigt man mindestens, um daraus einen Würfel zu bauen?

MA4648

.... Säulen

Auswertung

RICHTIG	9

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	3.02

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Würfel“ spricht die Leitidee Raum und Form (L3) an, weil es erforderlich ist, gedanklich mehrere Säulen zu einem Würfel zusammenzubauen und zu bestimmen, wie viele Säulen benötigt werden.

In der Aufgabe wird mit der vorgegebenen Darstellung einer Würfelsäule gearbeitet. Dabei wird (gedanklich) eine Darstellung eines Würfels konstruiert, der aus mehreren Würfelsäulen zusammengesetzt ist. Aus diesem Grund erfordert diese Aufgabe die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4).

Aufgrund dessen, dass es sich bei der Darstellung um eine vertraute Darstellung bzw. vertraute Körper (Würfel bzw. Quader) handelt und eine eher weniger anspruchsvolle gedankliche Operation mit diesen erforderlich ist, kann die Aufgabe in den *Anforderungsbereich I* eingeordnet werden.

Aufgabe: Quader und Netze

Teilaufgabe 1.1

Auf zwei Seitenflächen eines Quaders in Abbildung 1 ist jeweils eine Linie eingezeichnet.

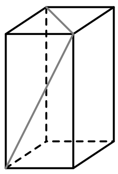


Abbildung 1

Skizziere in das Netz dieses Quaders in Abbildung 2 die fehlende Linie.

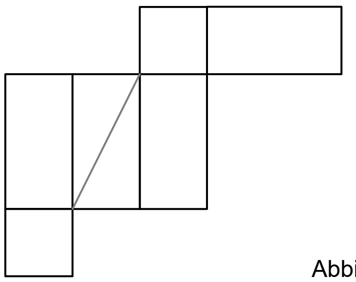
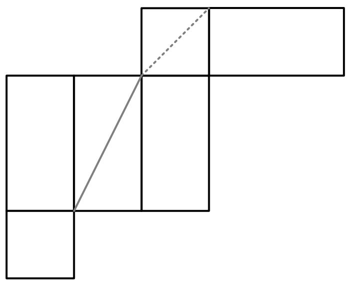
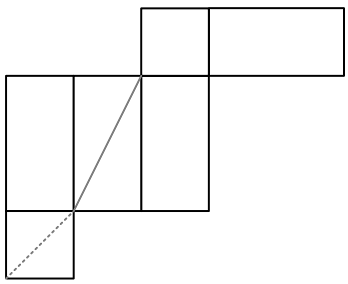


Abbildung 2

MA4629

Auswertung

RICHTIG	 ODER 

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	3.02

Teilaufgabe 1.2

Im Netz eines anderen Quaders in Abbildung 3 sind Linien eingezeichnet.

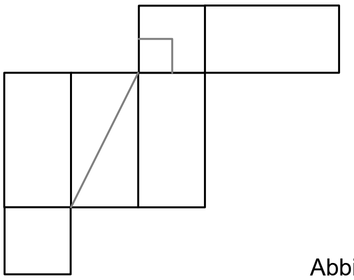


Abbildung 3

Skizziere in das Schrägbild des Quaders in Abbildung 4 die fehlenden Linien.

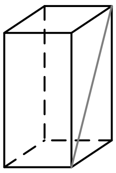
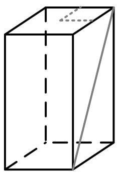
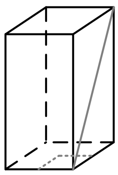


Abbildung 4

MA4630

Auswertung

RICHTIG	 ODER 

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	3.02

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Quader und Netze“ spricht die Leitidee *Raum und Form* (L3) an, da in beiden Teilaufgaben gedanklich mit einem Quader operiert wird. Dabei wird der Zusammenhang zwischen dem jeweiligen Körpernetz und dem Schrägbild des Quaders erkannt, um die fehlenden Linien einzuzeichnen.

In beiden Teilaufgaben werden in das Netz bzw. Schrägbild eines Quaders Linien eingezeichnet, sodass in beiden Teilaufgaben mit verschiedenen Darstellungen eines Quaders gearbeitet wird. Damit spricht die Aufgabe die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) an.

In beiden Teilaufgaben handelt es sich um vertraute und geübte Darstellungen eines Quaders, welche lediglich vervollständigt werden. Daher ist die Aufgabe „Quader und Netze“ dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen.

Aufgabe: Quader mit quadratischer Grundfläche

Gegeben ist ein rechteckiges Blatt Papier. Die eine Seite des Blattes ist doppelt so lang wie die andere. Aus diesem Blatt Papier kann der Mantel eines Quaders mit quadratischer Grundfläche gefaltet werden. Abbildung 1 zeigt die beiden Möglichkeiten, das Blatt entsprechend zu falten.

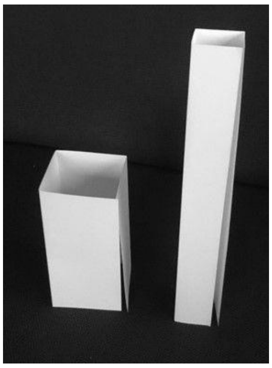


Abbildung 1

In Abbildung 2 ist das rechteckige Blatt dargestellt.

Zeichne die Linien ein, an denen das Blatt gefaltet werden muss, damit der linke Quader in Abbildung 1 entsteht.

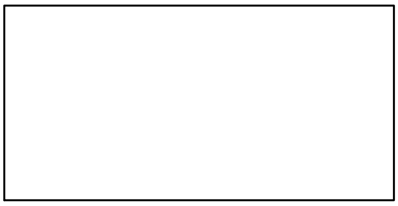
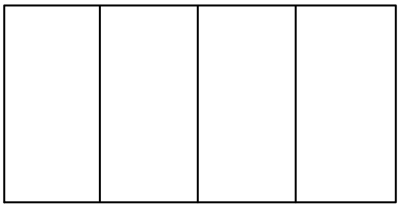


Abbildung 2

MA4628

Auswertung

RICHTIG	

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	3.02

Aufgabenbezogener Kommentar

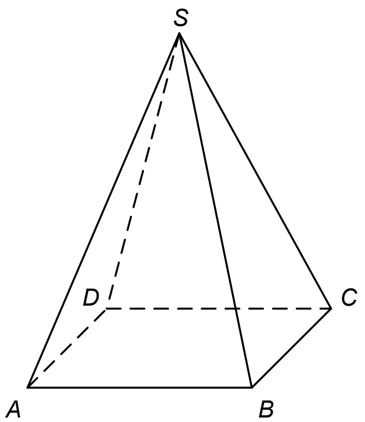
Die Aufgabe „Quader mit quadratischer Grundfläche" erfordert das gedankliche Operieren mit Körpern. Dabei ist die Vorstellung, an welchen Stellen das abgebildete Blatt gefaltet werden muss, sodass ein Quader entsteht, gefordert. Somit ist die Aufgabe in die Leitidee *Raum und Form* (L3) einzuordnen.

Um die richtigen Linien einzuzeichnen, ist es erforderlich, den dargestellten Quader in der Abbildung zu analysieren und in die Darstellung der ebenen Mantelfläche zu übertragen. Somit wird mit vertrauten Darstellungen mathematischer Objekte gearbeitet, was die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) anspricht.

Die Aufgabe „Quader mit quadratischer Grundfläche“ liegt im *Anforderungsbereich II*, da zwischen verschiedenen Darstellungen eines Quaders bzw. seiner Mantelfläche gewechselt wird und die Beziehung beider Darstellungsformen erkannt werden muss, um die richtigen Linien einzuzeichnen.

Aufgabe: Schnittflächen

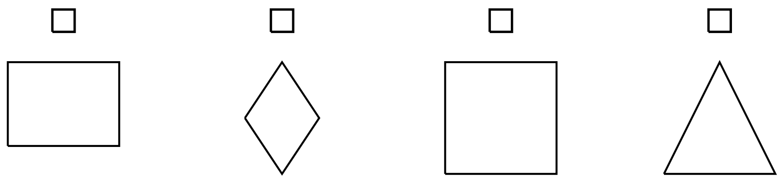
Die Abbildung zeigt eine gerade Pyramide. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat.



Die Pyramide wird parallel zur Grundfläche durchgeschnitten.

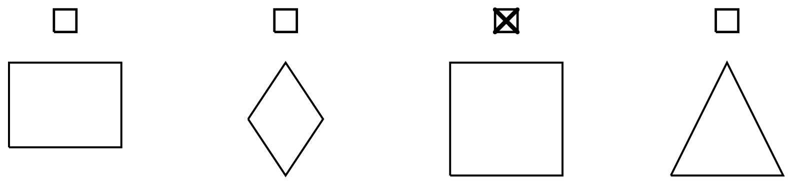
Welche Schnittfläche kann dabei entstehen?

Kreuze an.



MA4646

Auswertung

RICHTIG	

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	4
Bildungsstandards	3.02

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Schnittflächen“ ist der Leitidee *Raum und Form* (L3) zuzuordnen, da gedanklich mit einer Pyramide operiert wird. Es ist erforderlich, sich das Durchschneiden der Pyramide vorzustellen, um zu entscheiden, welche Schnittfläche entsteht.

Die Aufgabe erfordert die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4). Dabei wird die abgebildete Pyramide genutzt, um nachzuvollziehen, wie sie durchgeschnitten wird, andererseits muss aus Darstellungen möglicher Schnittflächen die Richtige ausgewählt werden.

Da es sich sowohl bei der Pyramide als auch bei den möglichen Schnittflächen um vertraute Darstellungen bekannter Objekte handelt, liegt die Aufgabe im *Anforderungsbereich I*.

Aufgabe: Tetraederstern

Abbildung 1 zeigt einen Tetraederstern. Dieser entsteht, wenn man zwei gleiche Tetraeder (siehe Abbildung 2) ineinander schiebt. Alle Kanten dieser zwei Tetraeder sind gleich lang.

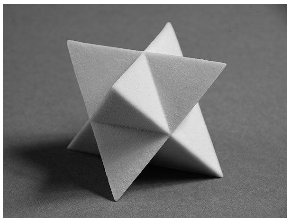


Abbildung 1

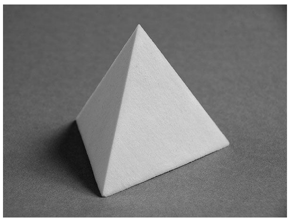


Abbildung 2

Teilaufgabe 1.1

An wie vielen Ecken des Tetraedersterns (siehe Abbildung 1) treffen genau drei Kanten zusammen?

MA4649 .... Ecken

Auswertung

RICHTIG	8

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4
Bildungsstandards	3.05m, 3.02

Teilaufgabe 1.2

Die Oberfläche des Tetraedersterns (siehe Abbildung 1) setzt sich aus gleich großen dreieckigen Teilflächen zusammen.

Aus wie vielen dreieckigen Teilflächen besteht die Oberfläche?

MA4650

....

Auswertung

RICHTIG	24

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5
Bildungsstandards	3.05m, 3.02

Teilaufgabe 1.3

Zwei Ecken des Tetraedersterns sind nun mit *A* und *B* bezeichnet (siehe Abbildung 3).

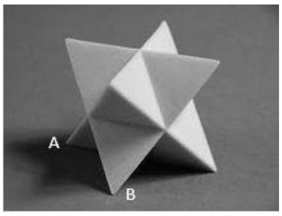
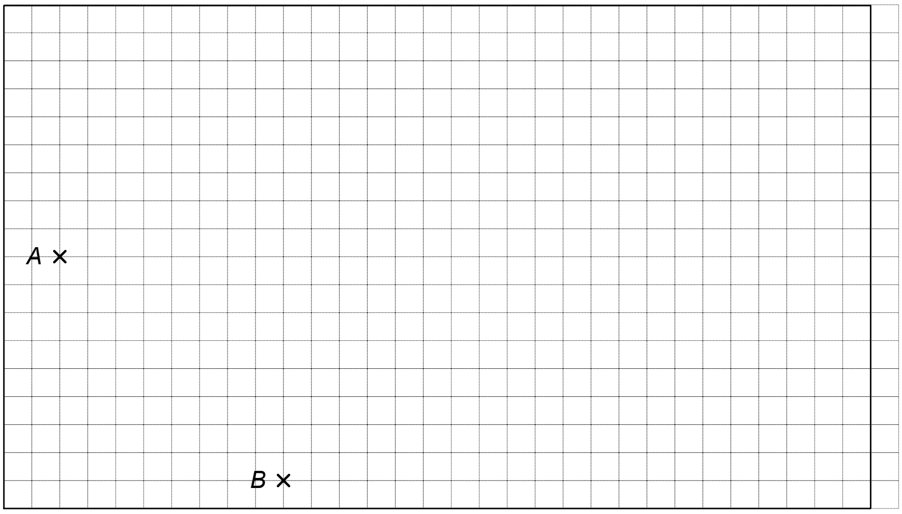


Abbildung 3

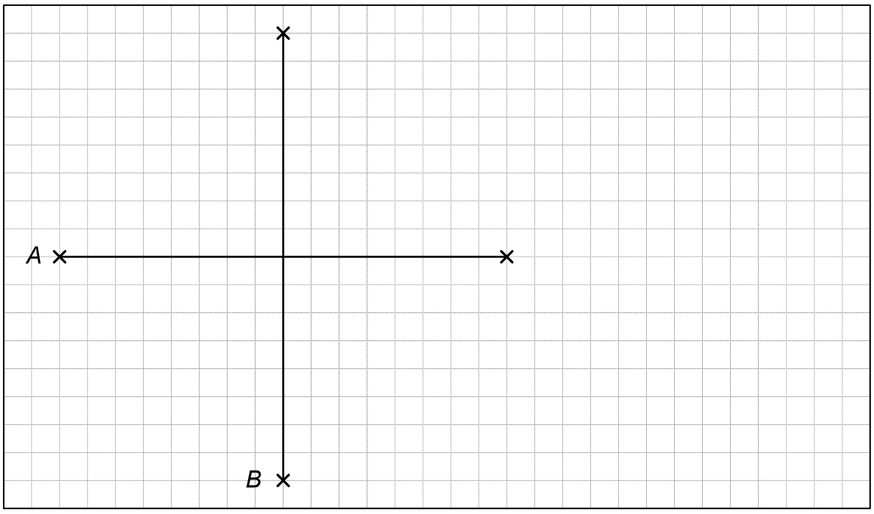
Die Ecken *A* und *B* des Tetraedersterns befinden sich auf dem Boden. Ihre Position auf dem Boden ist in der folgenden Zeichnung markiert.

Zeichne ein, wo der Tetraederstern den Boden berührt.



MA4651

Auswertung

RICHTIG	 [Anm.: Es reicht, wenn die Linien oder die weiteren Eckpunkte richtig eingezeichnet sind.]

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	5
Bildungsstandards	3.04

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Tetraederstern“ gehört zur Leitidee *Raum und Form* (L3). Einerseits ist das gedankliche Operieren mit dem Tetraederstern erforderlich, um die Anzahl an zusammentreffenden Kanten, die Anzahl der dreieckigen Teilflächen sowie die Berührungspunkte des Tetraedersterns mit dem Boden zu bestimmen. In den ersten beiden Teilaufgaben steht das Analysieren des Tetraeder-sterns, also eines Objektes des Raumes, im Vordergrund. In der dritten Teilaufgabe werden die Berührungspunkte des Tetraedersterns mit dem Boden eingezeichnet, sodass eine andere Darstellung des Tetraedersterns bzw. seiner Ecken und Kanten angefertigt wird.

In allen drei Teilaufgaben ist es notwendig, mit den Abbildungen des Tetraedersterns zu arbeiten, um dessen Eigenschaften zu analysieren. Daher sprechen alle drei Teilaufgaben die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) an. Zudem erfordert die dritte Teilaufgabe die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2), da die Schülerinnen und Schüler eine geeignete Strategie zur Lösung finden müssen. Beispielsweise kann hier die Symmetrie des Tetraedersterns genutzt werden, um die Berührungspunkte bzw. -linien korrekt zu übertragen.

Alle Teilaufgaben liegen im *Anforderungsbereich II*, da es sich bei dem dargestellten Tetraederstern um einen zusammengesetzten, nicht vertrauten Körper handelt, welcher analysiert wird bzw. mit welchem gedanklich operiert werden muss.

Anregungen für den Unterricht

Die Aufgaben „Stufenpyramide“, „Quaderzerlegung“, „Magnetkugelwürfel“, „Würfel“, „Quader und Netze“, „Quader mit quadratischer Grundfläche“, „Tetraederstern“ und „Schnittflächen“ erfordern das **gedankliche Operieren mit Körpern**. Dabei geht es zum einen darum, einen Körper (gedanklich) aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten, um Eigenschaften bezüglich seiner

Kanten oder Flächen zu analysieren. Zum anderen wird gefordert, einen Körper zu zerlegen (z. B. einen Quader in mehrere Würfel oder eine Pyramide in zwei Teile) oder mehrere Körper zu einem neuen Körper zusammenzusetzen (z. B. Würfelsäulen zu einem Würfel bzw. zwei Tetraeder zu einem Tetraeder-stern).

In den Aufgaben „Quaderzerlegung“ und „Magnetkugelwürfel“ sind Problemlösefähigkeiten gefordert. Bei der Bewältigung von Problemlöseaufgaben können Heurismen helfen. Zu den Heurismen, die für den Mathematikunterricht von Bedeutung sind, zählen **heuristische Hilfsmittel**, **heuristische Strategien** und **heuristische Prinzipien** (*Bruder & Collet,* 2011). Heuristische Hilfsmittel sind keine unmittelbaren Lösungsstrategien, sondern sollen beim Verstehen und Strukturieren eines Problems helfen, beispielsweise durch eine Visualisierung oder die Reduktion von Informationen. Bei der Aufgabe „Quaderzerlegung“ sind nicht alle Würfel des Quaders sichtbar. Dazu können Spielwürfel als heuristische Hilfsmittel bereitgestellt werden, um den Quader (zumindest teilweise) nachzubauen. Auf ähnliche Weise können auch in der Aufgabe „Magnetkugelwürfel“ heuristische Hilfsmittel eingesetzt werden. In dieser Aufgabe besteht ebenfalls eine Hürde darin, dass nicht alle Magnetkugeln sichtbar sind. Dies macht das Bestimmen der Anzahl an Magnetkugeln der Außenfläche schwieriger, da einige Magnetkugeln der Außenfläche von mehreren Seiten sichtbar sind und nicht mehrfach gezählt werden dürfen. Heuristische Strategien sind grundsätzliche Vorgehensweisen für Problemsituationen, wenn das Problem bereits verstanden wurde (Bruder & Collet, 2011). Heuristische Strategien sind nicht fachspezifisch und können in allen Lebens- und Problemlagen hilfreich sein. Beispielsweise zählen das systematische Probieren und das Rückwärtsarbeiten zu den heuristischen Strategien. Die Aufgabe „Quaderzerlegung“ kann beispielsweise durch Rückwärtsarbeiten gelöst werden, indem zunächst die Anzahl an Würfeln im Quader bestimmt wird (Teilaufgabe 1.1). Anhand der Anzahl der Würfel wird ermittelt, wie viele zusammengesetzte Würfel aus der Gesamtmenge an einzelnen Würfeln konstruiert werden können. Durch Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes kann das Problem der Bestimmung der Anzahl an (nicht sichtbaren) Würfeln des Quaders auf die Berechnung des Volumens eines Quaders zurückgeführt werden. Im Unterricht sollten heuristische Strategien thematisiert werden, damit Lernende in weiteren Lernsituationen auf diese zurückgreifen können. Gut geeignet dazu sind Reflexionsaufgaben, in denen unterschiedliche Lösungswege und -strategien zu derselben Aufgabe herausgearbeitet werden. Beispielsweise können unterschiedliche Lösungsstrategien mithilfe einer Strategiekonferenz diskutiert werden. Jede Schülerin und jeder Schüler bearbeitet eine vorgegebene Aufgabe zunächst allein. Anschließend werden die Aufgabenbearbeitungen in Kleingruppen besprochen, Lösungswege und -strategien diskutiert und sich auf einen Lösungsweg bzw. eine Strategie geeinigt, welche dann so aufbereitet wird, dass sie der gesamten Klasse vorgestellt werden kann. Weitere Informationen zu einer **Strategiekonferenz** im Mathematikunterricht können unter folgendem Link abgerufen werden:

https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/docs/MSK_Freiburg_Steckbrief_Mathekonferenz.pdf

Um gedanklich mit Körpern operieren zu können, ist die Fähigkeit des **räumlichen Vorstellungsvermögens** notwendig. Wie bereits im vorangegangenen Kapitel erwähnt, besteht das räumliche Vorstellungsvermögen aus den Komponenten *Räumliche Wahrnehmung*, *Veranschaulichung*, *Mentale Rotation*, *Räumliche Beziehungen* und *Räumliche Orientierung* (Maier, 1999). In den obigen Aufgaben werden verschiedene Komponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens angesprochen. Beispielsweise spricht die Aufgabe „Quader mit quadratischer Grundfläche“ die Komponente *Veranschaulichung* an, da sie erfordert, sich gedanklich das Auseinanderfalten des dargestellten Quaders vorzustellen. Auch die Aufgabe

„Schnittflächen“ spricht die Komponente *Veranschaulichung* an, da zur Bestimmung der entstehenden Schnittfläche die Vorstellung des Durchschneidens der dargestellten Pyramide benötigt wird. Zum Lösen der Aufgabe „Stufenpyramide“ ist die Komponente *Mentale Rotation* erforderlich, da nach den von oben und von der Seite sichtbaren Würfelseiten gefragt ist, sodass die Stufenpyramide gedanklich rotiert werden muss. Wie das räumliche Vorstellungsvermögen mithilfe der Kopfgeometrie geschult werden kann, wird mit entsprechenden Beispielaufgaben dargelegt.

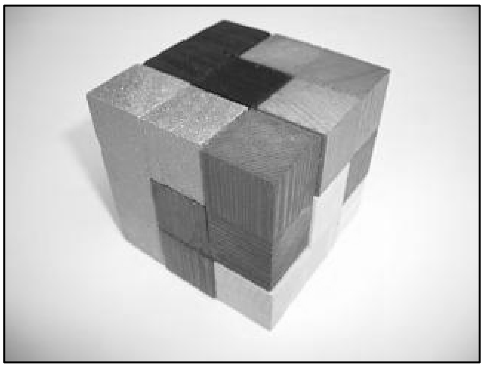


Abbildung 9: Soma-Würfel (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Somaw%C3%BCrfel#/media/Datei:Colored-Soma-cube.jpg)

Da eine Voraussetzung für das räumliche Vorstellungsvermögen ist, dass durch die Arbeit mit sichtbaren (berührbaren oder abgebildeten) Objekten Vorstellungsbilder von Objekten aufgebaut werden, mit welchen dann gedanklich operiert wird, bietet sich im Geometrieunterricht auch die Arbeit mit haptischem Material an (*Roth & Wittmann*, 2018). Ein Beispiel dafür ist die Arbeit mit dem **Soma-Würfel** (siehe Abbildung 9). Dieser besteht aus 7 unregelmäßig geformten Teilen, welche jeweils aus kleineren Würfeln zusammengesetzt sind. Die einzelnen Teile können auf verschiedene Weise entweder zu einem großen 3x3x3-Würfel oder zu einer Vielzahl verschiedener Körper zusammengesetzt werden. Durch das Zusammensetzen der einzelnen Teile können verschiedene Objekte im Raum analysiert und verstanden werden (*Kroker*, 2024). Neben der Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens können durch die Arbeit mit dem Soma-Würfel auch Problemlösefähigkeiten gefördert werden. Da es über 200 verschiedene Möglichkeiten gibt, die einzelnen Teile zu einem großen Würfel zusammenzubauen, können Lernende mit dem Soma-Würfel experimentieren und Lösungsstrategien entwickeln. Das Beginnen mit unregelmäßigeren, komplexeren Teilen stellt beispielsweise eine effektive Strategie dar (*Kroker*, 2024). Durch das systematische Probieren und experimentelle Arbeiten werden zudem das analytische und kreative Denken von Schülerinnen und Schülern gefördert. Im Unterricht kann der Soma-Würfel auf vielfältige Art und Weise eingesetzt werden: So können Schülerinnen und Schüler zunächst aufgefordert werden, den 3x3x3-Würfel aus den einzelnen Teilen zu bauen. Weiterführend können die Lernenden aufgefordert werden, komplexere Figuren aus den einzelnen Teilen zu bauen. Auch mithilfe dynamischer Geometrie-Software können die verschiedenen Möglichkeiten zum Zusammenbauen des 3x3x3-Würfels visualisiert werden. Dies zeigt das folgende **GeoGebra-Applet**:
https://www.geogebra.org/m/kycH2nLG

Weitere Informationen zum **Soma-Würfel sowie begleitendes Material** können unter dem folgenden Link abgerufen werden:

https://www.betzold.de/blog/soma-wuerfel/#3

6.3. Körper darstellen und aus verschiedenen Darstellungen erkennen

Aufgabe: Würfelnetze

Bei welcher Abbildung handelt es sich um das Netz eines Würfels?

Kreuze an.

MA4625

Auswertung

RICHTIG	

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1a
Bildungsstandards	3.02, 3.04

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Würfelnetze“ gehört zur Leitidee *Raum und Form* (L3), da ein Würfel aus seiner Darstellung als Netz erkannt werden muss.

Da mit der Darstellung eines Würfels als Würfelnetz gearbeitet wird, wird folglich die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) angesprochen.

Die Aufgabe wird dem *Anforderungsbereich I* zugeordnet, da es sich bei den Würfelnetzen um vertraute Darstellungen handelt, aus welchen die Richtige ausgewählt werden muss.

Aufgabe: Körpernetze

Teilaufgabe 1.1

Abbildung 1 zeigt ein Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist.

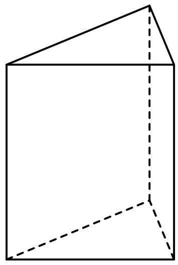
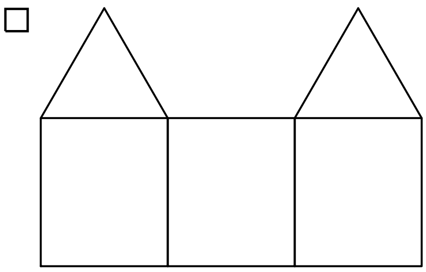
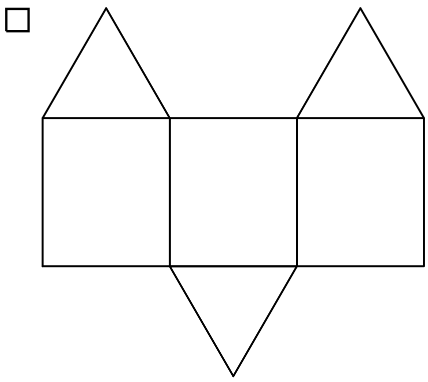


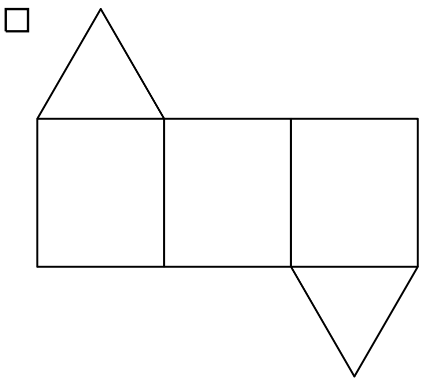
Abbildung 1

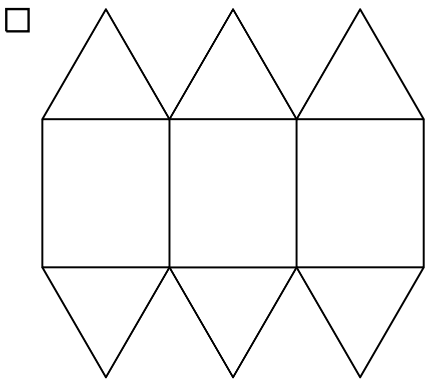
Welche Abbildung zeigt das Netz zu diesem Prisma?

Kreuze an.



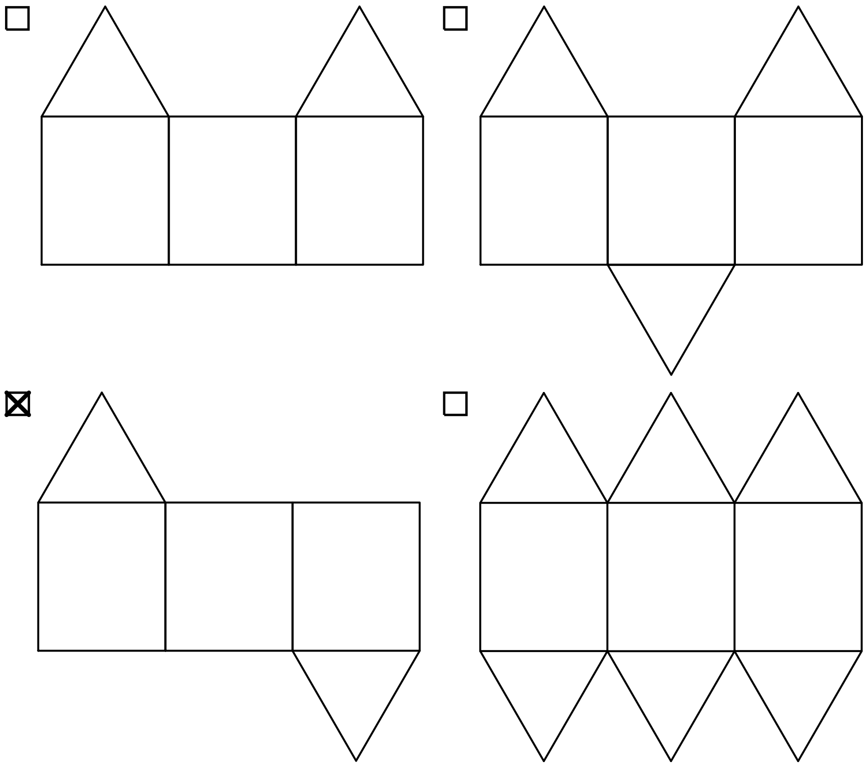






MA4626

Auswertung

RICHTIG	

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	1b
Bildungsstandards	3.04

Teilaufgabe 1.2

Abbildung 2 zeigt das Netz eines Körpers.

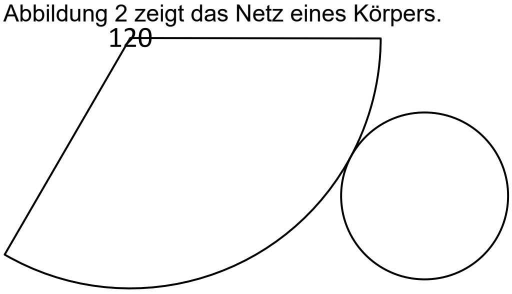


Abbildung 2

Zu welchem Körper passt das Netz?

Kreuze an.

☐ Kegel ☐ Kugel ☐ Pyramide ☐ Zylinder

MA4627

Auswertung

RICHTIG	☒ Kegel ☐ Kugel ☐ Pyramide ☐ Zylinder

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	3.04

Aufgabenbezogener Kommentar

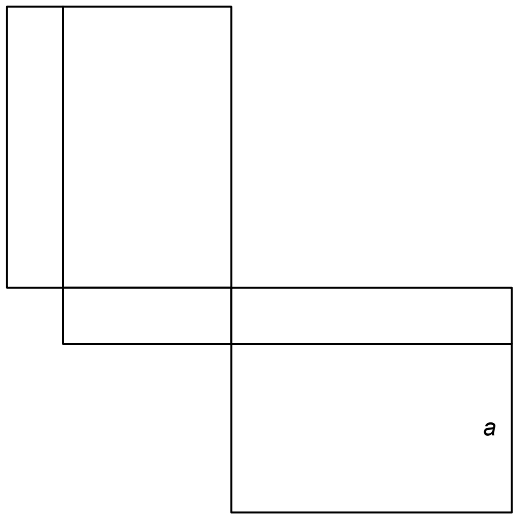
Die Aufgabe „Körpernetze“ wird der Leitidee *Raum und Form* (L3) zugeordnet, da in beiden Teilaufgaben ein Körpernetz einem Körper zugeordnet wird (bzw. andersherum).

In beiden Teilaufgaben wird mit Darstellungen von Körpern als Netz gearbeitet, weswegen die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) erforderlich ist.

Da es sich bei den Körpern und Körpernetzen um vertraute Darstellungen handelt, liegen beide Teilaufgaben im *Anforderungsbereich I*.

Aufgabe: Quadernetz vervollständigen

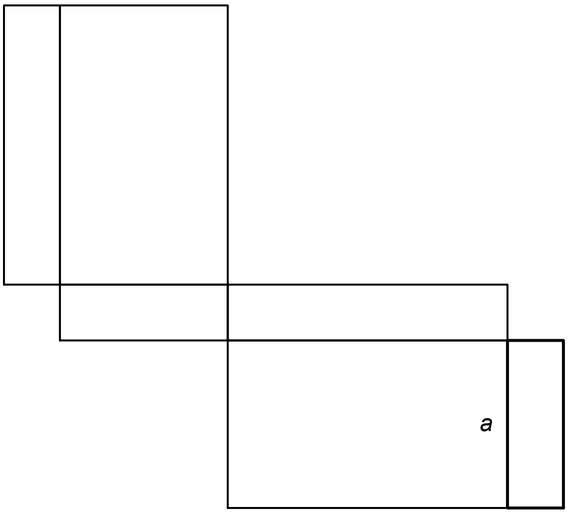
Die Abbildung zeigt ein unvollständiges Quadernetz.



Zeichne an die Kante *a* die fehlende Seitenfläche ein.

MA4631

Auswertung

<table>
<tr><td>RICHTIG</td><td>

UND

Die fehlende Seitenfläche in der Zeichnung hat die Längen $\boldsymbol{a} = \mathbf{3\,cm}$ und $\boldsymbol{b} = \mathbf{1\,cm}$.</td></tr>
</table>

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	4
Bildungsstandards	3.04

Aufgabenbezogener Kommentar

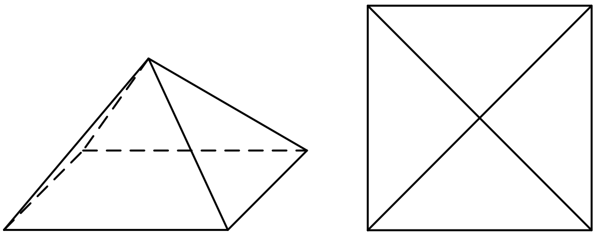
Die Aufgabe „Quadernetz vervollständigen“ wird der Leitidee *Raum und Form* (L3) zugeordnet, da ein Quadernetz vervollständigt werden soll und somit ein Körper als Netz dargestellt wird.

Die Aufgabe spricht die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4) an, da die Darstellung eines Körpers (als Netz) erzeugt wird.

Da der Bezug zwischen Körper und Körpernetz hergestellt werden muss, liegt die Aufgabe im *Anforderungsbereich II*. Hierbei fehlt die Abbildung des Körpers als Schrägbild, sodass die Beziehung zum Körpernetz gedanklich erfolgt.

Aufgabe: Draufsicht

Körper können unter anderem als Schrägbild und in der Draufsicht dargestellt werden.
Abbildung 1 zeigt diese beiden Perspektiven bei einer Pyramide.



Schrägbild Draufsicht Abbildung 1

Abbildung 2 zeigt ein Schrägbild eines Körpers.

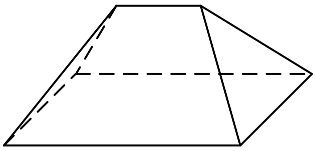
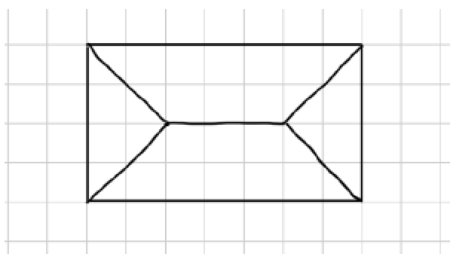


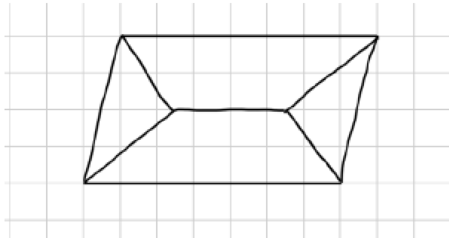
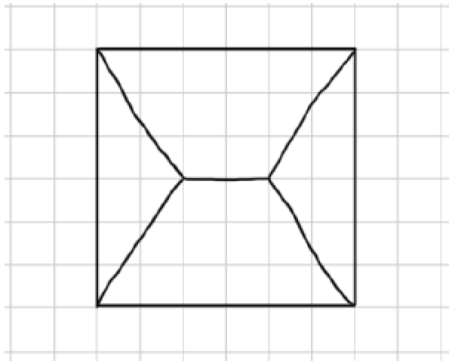
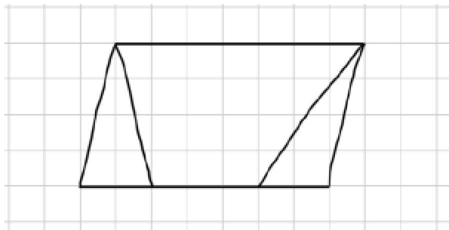
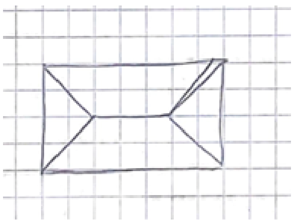
Abbildung 2

Skizziere die Draufsicht des Körpers.

MA4639

Auswertung

RICHTIG	Es wurde eine Draufsicht zu dem Schrägbild gezeichnet, welche folgende Bedingungen erfüllt: - Die Grundfläche ist viereckig UND - die im Schrägbild obere Kante ist (implizit) erkennbar UND - die vier Kanten, die im Schrägbild von der Grundfläche zur oberen Kante führen, sind (implizit) erkennbar. Beispiel(e) • 

	•  •  • 
FALSCH	Alle anderen Antworten Beispiel(e) •  [Anm.: Es dürfen keine doppelten Linien gezeichnet sein.]

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	2
Bildungsstandards	3.04

Aufgabenbezogener Kommentar

Da in dieser Aufgabe die Draufsicht eines geometrischen Körpers skizziert werden soll, wird der Aufgabe die Leitidee *Raum und Form* (L3) zugeordnet.

Die Aufgabe erfordert die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), da eine Draufsicht eines Körpers angefertigt werden soll.

Bei dem dargestellten Körper handelt es sich weder um einen vertrauten Körper noch um eine vertraute Darstellung, sodass die Aufgabe „Draufsicht“ in den *Anforderungsbereich II* eingeordnet wird.

Aufgabe: Körperflächen

Ein Körper hat genau sechs Flächen. Jede dieser Flächen ist ein Rechteck.

Skizziere das Schrägbild eines solchen Körpers.

MA4640

Auswertung

RICHTIG	Ein beliebiger Quader wurde im Schrägbild skizziert. [Anm.: Verdeckte Körperkanten können, müssen aber nicht skizziert werden.]

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	3.04

Aufgabenbezogener Kommentar

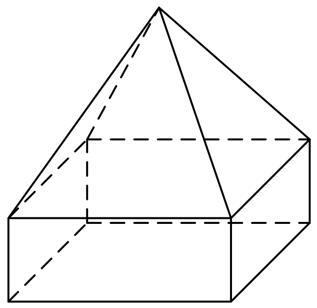
Die Aufgabe „Körperflächen“ gehört zur Leitidee *Raum und Form* (L3), da das Schrägbild eines Körpers angefertigt werden soll.

Da anhand der verbalen Beschreibung der Eigenschaften eines Körpers ein Schrägbild angefertigt wird, erfordert die Aufgabe die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4). Zudem erfordert die Aufgabe die Strategie des Rückwärtsdenkens, da beschrieben ist, wie der Körper aussehen soll, jedoch eine geeignete Vorgehensweise zur Lösung des Problems gefunden werden muss. Dadurch ist ebenfalls die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* (K2) erforderlich.

Anhand einer verbalen Beschreibung eines Körpers soll dessen Schrägbild erzeugt werden, somit also zwischen Darstellungsformen gewechselt werden, wofür die Anwendung geeigneter Strategien erforderlich ist. Somit liegt die Aufgabe im *Anforderungsbereich II*

Aufgabe: Körper

In der Abbildung ist das Schrägbild eines Körpers mit quadratischer Grundfläche zu sehen.



Teilaufgabe 1.1

Gib die Anzahl der Flächen und die Anzahl der Kanten dieses Körpers an.

MA4641 .... Flächen und MA4642 .... Kanten

Auswertung

RICHTIG	9 UND 16

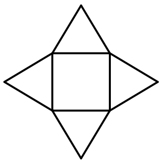
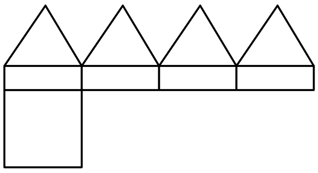
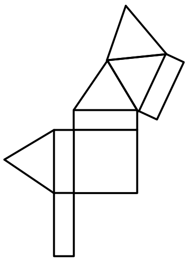
Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	I
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	3.05m

Teilaufgabe 1.2

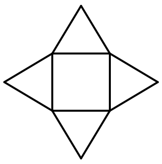
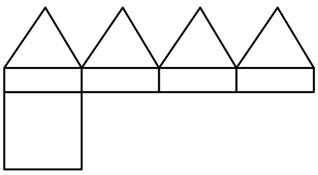
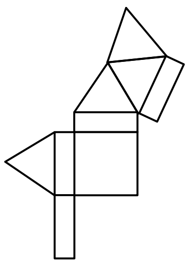
Können die folgenden Netze zum abgebildeten Körper passen?

Kreuze jeweils an.

		ja	nein
MA4643		☐	☐
MA4644		☐	☐
MA4645		☐	☐

Auswertung

RICHTIG

	ja	nein
	☐	☒
	☒	☐
	☒	☐

Merkmale

Leitidee	Raum und Form (L3)
Allgemeine Kompetenzen	Mathematisch argumentieren (K1) Mathematische Darstellungen verwenden (K4)
Anforderungsbereich	II
Kompetenzstufe	3
Bildungsstandards	3.04

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe „Körper" ist der Leitidee *Raum und Form* (L3) zuzuordnen, weil ein geometrischer Körper analysiert und dessen Körpernetz identifiziert werden muss.

Die erste Teilaufgabe erfordert die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4), da mit einer gegebenen Darstellung, dem Schrägbild eines Körpers, gearbeitet wird. Aus demselben Grund erfordert auch die zweite Teilaufgabe die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (K4). Zusätzlich muss hier aus verschiedenen dargestellten Netzen das richtige Körpernetz erkannt werden. Zwar erfordert die zweite Teilaufgabe keine schriftliche Begründung, jedoch muss aufgrund einer vorher überlegten Argumentation die Entscheidung für bzw. gegen ein Körpernetz getroffen werden. Somit ist auch die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* (K1) gefordert.

Die erste Teilaufgabe liegt im *Anforderungsbereich I*, weil lediglich die Anzahl der Flächen und Kanten aus der Abbildung abgelesen bzw. gezählt werden muss. Da in der zweiten Teilaufgabe das Körpernetz eines zusammengesetzten Körpers ausgewählt werden muss, indem für jedes Netz eine Entscheidung getroffen wird, ist diese Teilaufgabe *Anforderungsbereich II* zuzuordnen.

Anregungen für den Unterricht

In den Aufgaben „Würfelnetze", „Körper", „Körpernetze", „Draufsicht", „Körperflächen" und „Quadernetz vervollständigen" geht es darum, einen **Körper in einem Körpernetz zu identifizieren** oder eine **Darstellung eines Körpers zu erstellen** (ein Körpernetz, Schrägbild oder eine Draufsicht). Ein Schrägbild eines Körpers soll auch in der Aufgabe „Körperflächen" erstellt werden. In **Schülerlösungen der Aufgabe „Körperflächen"** können mögliche Schwierigkeiten mit der Aufgabe und dem Erstellen des Schrägbildes identifiziert werden.

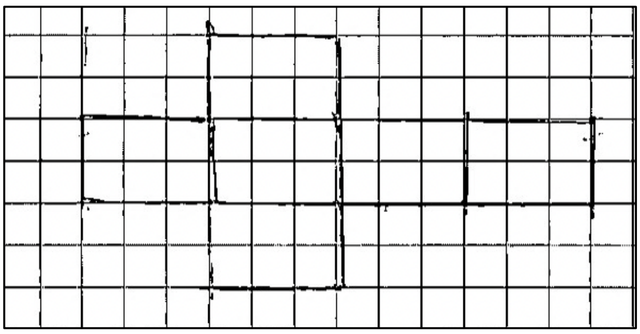
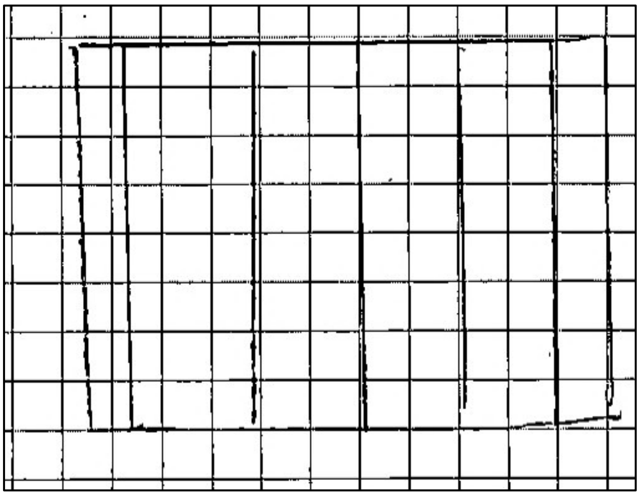


Abbildung 10: Schülerlösung 1

In Schülerlösung 1 (siehe Abbildung 10) wurde anstatt eines Schrägbildes ein Körpernetz gezeichnet.



.

Abbildung 11: Schülerlösung 2

Dies deutet auf ein Verständnisproblem des Begriffs „Schrägbild“ bei dem Schüler oder der Schülerin hin. Ähnliches lässt sich in Schülerlösung 2 (siehe Abbildung 11) erkennen, in welcher ebenfalls kein Schrägbild eines Quaders, sondern ein (nicht korrektes) Netz der Mantelfläche eines Quaders gezeichnet wurde. Indem verschiedene Darstellungen von Körpern thematisiert werden, sollten die Begriffe noch einmal wiederholt werden. Mithilfe von Visualisierungen und dynamischer Geometrie-Software können Körper in verschiedenen Darstellungen erkundet, Darstellungen von Körpern erzeugt, der Zusammenhang zwischen verschiedenen Darstellungen (z. B. der Übergang vom Schrägbild eines Körpers zu seinem Netz) untersucht und die entsprechenden Begriffe thematisiert werden. Für das Netz eines Körpers gibt es verschiedene Anordnungsmöglichkeiten, wie die Teilaufgabe 1.2 der Aufgabe „Körper“ zeigt.

Mit **dynamischer Geometrie-Software** kann auch überprüft werden, ob eine Anordnung dem Netz eines bestimmten Körpers entspricht. Außerdem können experimentell verschiedene Anordnungen erkundet sowie Körpernetze eigenständig erstellt werden (*Greefrath* et al., 2024). Das folgende Applet zeigt beispielsweise verschiedene Anordnungen für das Netz eines Würfels und visualisiert, wie die jeweiligen Netze zu einem Würfel zusammengeklappt werden können**:**

https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/raum/netze

Mit dem 3D-Programm **„Shapes“** (https://shapes.learnteachexplore.com/) kann mit Darstellungen einer Vielzahl von Körpern experimentiert werden. Beispielsweise können verschiedene Anordnungen von Netzen eines Körpers ausgewählt und zu einem Körper gefaltet werden. Dies ist für einige Körper bereits in der kostenlosen Demo-Version möglich. Des Weiteren kann ein Körper gedreht und somit von allen Seiten betrachtet werden oder seine Flächen, Kanten und Eckpunkte sowie die Anzahl dieser können angezeigt werden (*Greefrath et al*., 2024). Auch in GeoGebra können Körper und ihre Netze erkundet werden, wie beispielsweise das folgende Applet zeigt:

https://www.geogebra.org/m/w7ac6V2X

In Teilaufgabe 1.2 der Aufgabe „Körper" soll für drei verschiedene Körpernetze jeweils entschieden werden, ob sie zu dem abgebildeten Körper passen. Um diese Entscheidung zu treffen, ist es notwendig, für jedes Netz neu zu prüfen, ob dieses zum abgebildeten Körper zusammengefaltet werden kann. In dieser Aufgabe ist zwar keine Argumentation gefordert, allerdings müssen die Entscheidungen aufgrund einer zuvor überlegten Argumentation getroffen werden. Um die Kompetenz *Mathematisch argumentieren* (K1) stärker zu fördern, kann die Aufgabe im Unterricht dahingehend verändert werden, dass eine Argumentation für bzw. gegen die jeweiligen Körpernetze eingefordert wird. Das Verbalisieren von geometrischen Objekten ist Teil des Lernens geometrischer Begriffe (*Weigand*, 2018). Um Vorstellungen über geometrische Objekte aufzubauen und geometrische Begriffe zu erlernen, ist die Verbindung von Handlungen mit Objekten (z. B. das Operieren mit Objekten, sowohl im Kopf als auch in der Realität), dem Wahrnehmen und dem Verbalisieren von Objekten von Bedeutung.

7. Literatur

Blum, W. (2010). Einführung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor.

Bruder, R., & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht (1. Aufl). Cornelsen Scriptor.

Greefrath, G. (2018). Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). Didaktik der Analysis. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2024). Digitalisierung im Mathematikunterricht: Theorie und Praxis digitaler Medien in der Sekundarstufe I. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-68682-9

Hafner, T. (2012). Proportionalität und Prozentrechnung. In T. Hafner (Hrsg.), Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und didaktische Analysen (S. 33–60). Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8668-2_5

Heiderich, S. & Hußmann, S. (2013). „Linear, proportional, antiproportional... Wie soll ich das denn alles auseinanderhalten“ – Funktionen verstehen mit Merksätzen?! In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, & G. Wickel (Hrsg.), Mathematik verständlich unterrichten: Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung (S. 27–45). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-00992-2_3

Klieme, Eckhard; Avenarius, Hermann; Blum, Werner; Döbrich, Peter; Gruber, Hans; Prenzel, Manfred; Reiss, Kristina; Riquarts, Kurt; Rost, Jürgen; Tenorth, Heinz-Elmar; Vollmer, Helmut J.; Bundesministerium für Bildung und Forschung. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. Bonn, Berlin.

KMK. (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. Wolters Kluwer.

KMK. (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Beschluss vom 15.10.2004. Wolters Kluwer.

KMK. (2005b). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.

KMK. (2015). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. Wolters Kluwer.

Kroker, B. (2024). Einsatz des Soma-Würfels im Unterricht | Betzold Blog. Abgerufen am 01.10.2024 von https://www.betzold.de/blog/soma-wuerfel/#3

Leiss, D., & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Scriptor.

Maier, P. H. (1999). Raumgeometrie mit Raumvorstellung—Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. Mathematikunterricht, 45(3), 3–18.

Nitsch, R. (2015). Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10157-2

OECD (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy. OECD Publishing.

Pöhler, B., & Prediger, S. (2017). Verstehensförderung erfordert auch Sprachförderung – Hintergründe und Ansätze einer Unterrichtseinheit zum Prozente verstehen, erklären und berechnen. In A. Fritz, S. Schmidt, & G. Ricken (Hrsg.), Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie (S. 436–459). Beltz.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S., & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2017). Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Sachrechnen: Größen – Überschlagen –Textaufgaben – Diagramme – Proportionen – Prozentrechnung. Cornelsen.

Roth, J. (2012). Geometrische Körper. Erkennen und Sortieren als Grundlage der Begriffsbildung. Fördermagazin, 2, 13–17.

Roth, J., & Wittmann, G. (2018). Ebene Figuren und Körper. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & G. Wittmann, Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S. 107–148). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8

Vollrath, H.-J. (1984). Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. Klett.

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik, 10, 3–37.

Weigand, H.-G. (2018). Begriffslernen und Begriffslehren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme, & G. Wittmann, Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S. 85–106). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 21(61), 37–46. https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214

8. Abbildungsverzeichnis

9. Verzeichnis der Beispielaufgaben

10. Tabellenverzeichnis

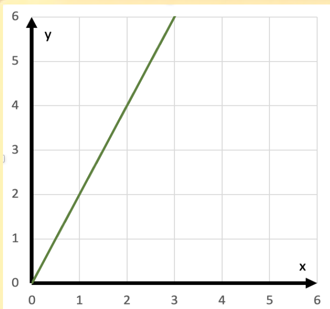
Proportionale Zuordnungen

1. **Schneide die einzelnen Dominosteine aus.**
2. **Lege die Steine wie beim Domino so aneinander, dass die angrenzenden Steine die gleiche proportionale Zuordnung beschreiben.**

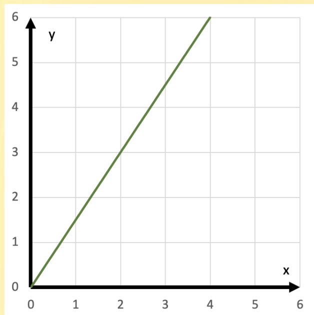
$y = 2x$

x	2	3	4
y	-8	-12	-16

Jedem *x*-Wert wird die gleiche Zahl als *y*-Wert zugeordnet.



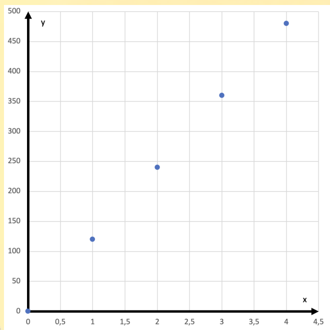
Die proportionale Zuordnung hat die Steigung –4.



Die Hälfte des *x*-Wertes ergibt den *y*-Wert.

Lena möchte selbst gepressten Apfelsaft in Flaschen füllen. In eine Flasche passt ein Liter.

Die Punkte (2 I 3); (4 I 6) und (0 I 0) liegen auf der Geraden.



Der Proportionalitätsfakto r ¾ ist.

$$y = \frac{1}{2}x$$

Ein Schokoriegel hat 120 Kalorien.

x	*y*
8	6
12	9
16	12